

УДК 620.1

В.С. Ерасов¹, Е.И. Орешко¹

КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА И ПУАССОНОВА СИЛА

DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-4-79-86

Представлены результаты теоретических исследований условия равновесия деформируемого изотропного тела при упругом растяжении и сжатии. Предложены модели появления поперечных деформаций с образованием в теле внутренних объемных взаимоуравновешивающихся напряжений. На основе предложенных моделей разработана схема разделения деформированного состояния одноосного растяжения на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения, одноосного растяжения с двухосным сжатием, трехосного равномерного сжатия. Показано применение схемы для описания условий деформирования при двухосном и трехосном растяжении, чистом сдвиге.

Ключевые слова: деформируемое изотропное тело, растяжение, сжатие, сдвиг, деформация, напряжение, удельная потенциальная энергия.

V.S. Erasov¹, E.I. Oreshko¹

POISSON RATIO AND POISSON FORCE

In article the results of theoretical researches of a condition of balance of a deformable isotropic body at elastic extension and compression are presented. Models of occurrence of cross-section deformations with formation of internal volume of interbalance tension in a body are offered. On the basis of the offered models the scheme of division of the deformed condition of uniaxial stretching by the sum of the deformed conditions from uniaxial stretching, uniaxial stretching with biaxial compression, triaxial uniform compression has been developed. The scheme application for the description of conditions of deformation at biaxial and triaxial stretching, pure shift has been shown.

Keywords: deformable isotropic body, stretching, compression, shift, deformation, tension, specific potential energy.

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

Введение

В науке о прочности материалов стремятся к взаимосвязи между теоретическим представлением процесса деформирования и экспериментальной стороной явления. Качественные результаты исследований деформации и разрушения получают при органичном сочетании этих двух сторон. Процесс реализации в материале нагружаемого тела деформаций – сложный процесс, он развивается стадийно [1–5]. Сначала реализуются механизмы с низкой энергией активации (упругая деформация), затем – с более высокой (пластическая деформация). Упругое напряженно-деформированное состояние материала в конструкции является основным состоянием для расчетов конструкций на прочность [6–15]. В соответствии с классическими представлениями, в условиях одноосного растяжения или сжатия деформируемого изотропного тела в нем появляются деформации в направлениях, перпендикулярных направлению растяжения или сжатия, не вызывающие появления в теле в этом направлении напряжений. Однако при испытаниях широ-

ких образцов из листовых материалов на растяжение наблюдается потеря образцом устойчивости (выпучивание) в направлении, перпендикулярном направлению растяжения, что подразумевает наличие в образце сжимающих напряжений [16–25]. Другим непонятным фактом является неаддитивность энергий упругой деформации при добавлении к одноосному нагружению последовательных нагружений по двум другим осям. Целью данной статьи является представление теоретической модели упругого деформирования изотропного материала, объясняющей указанные противоречия.

Работа выполнена в рамках реализации комплексной научной проблемы 3.3. «Технологии прогнозирования свойств, моделирования и реализации современных процессов конструирования и производства изделий из неметаллических и композиционных материалов с использованием цифровых методов, совместимых с CAD/CAM/CAE и PLM системами» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [26–29].

Модели деформирования

Рассмотрим процесс деформирования при растяжении участка длинного стержня с круглым поперечным сечением из изотропного материала. Пусть ϵ – относительная продольная деформация стержня при приложении к нему растягивающей нагрузки, μ – коэффициент Пуассона. В пределах упругости $0 < \mu < 0,5$ относительное изменение длины стержня равно ϵ , относительное изменение диаметра стержня равно $-\mu\epsilon$, относительное изменение площади боковой поверхности стержня равно $\epsilon(1-\mu)$, относительное изменение объема равно $\epsilon(1-2\mu)$. Данные значения получены при условии, что $\epsilon \ll 1$, которое позволяет пренебречь из-за их незначительности дополнительными слагаемыми, представляющими собой величины порядка ϵ^2 и ϵ^3 . Таким образом, при $0 < \mu < 0,33$ в пределах упругой деформации по отношению к исходным величинам менее всего меняется диаметр стержня, за ним следуют изменения объема и поверхности, а наибольшее относительное изменение претерпевает продольная деформация. Процессы изменения объема, площади поверхности и линейных размеров являются обратимыми. Приложенная к стержню сила вызывает появление в стержне напряжений, в результате действия которых и произошли представленные ранее изменения. Выбор в качестве основной переменной ϵ в зависимости $\sigma = F(\epsilon)$ при таких условиях является логичным и для теоретических исследований, и для эксперимента [30–33].

Однако при $0,33 < \mu < 0,5$ относительное изменение диаметра стержня становится больше относительного изменения объема. Принцип сечений для определения внутренних сил, перенесенный из теоретической механики, применим и в этом случае, однако вызывает сомнение механизм определения напряжений σ в каждой точке стержня, сумма которых равна внутренней силе. Дадим пояснения этому с помощью рис. 1, на котором представлен элемент кристаллического тела с кубической элементарной ячейкой. Наибольшее количество атомов в таком теле находится в симметричном силовом поле с минимальным значением потенциальной энергии (на рисунке атом выделен черным цветом). Любое усилие, направленное на изменение положения этого атома, вызовет появление в теле упругого объемно-

го напряженно-деформированного состояния. При значениях коэффициента Пуассона больше 0,33 напряженно-деформированное состояние стержня следует оценивать скорее как объемное трехосное состояние, а не одноосное напряженное состояние при объемной деформации.

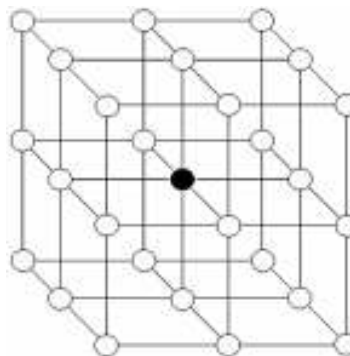


Рис. 1. Элемент кристаллического тела с кубической элементарной ячейкой

Работа внешней силы и увеличение за ее счет полной удельной потенциальной энергии стержня из-за изменения вида напряженно-деформированного состояния не изменятся, а изменятся величины и вид напряжений и деформаций, формирующих эту энергию. Для разработки модели целесообразно использовать в модели величины и функции разделить на величины непосредственно измеренные и условно определенные. К непосредственно измеренным величинам относятся: ϵ – относительная продольная деформация стержня, μ – коэффициент Пуассона, величина работы внешней силы и увеличение за ее счет полной удельной потенциальной энергии. К условно определенным величинам следует отнести величины и вид определяемых напряжений.

В работе [34] предложено одноосное растяжение с продольной деформацией ϵ и поперечной деформацией $-\mu\epsilon$ представить как сумму деформированных состояний из одноосного растяжения с продольной деформацией $\epsilon(1+\mu)$ при отсутствии поперечной деформации и трехосного сжатия с деформацией $-\mu\epsilon$ (рис. 2). Принятие данного допущения приводит к увеличению в первом

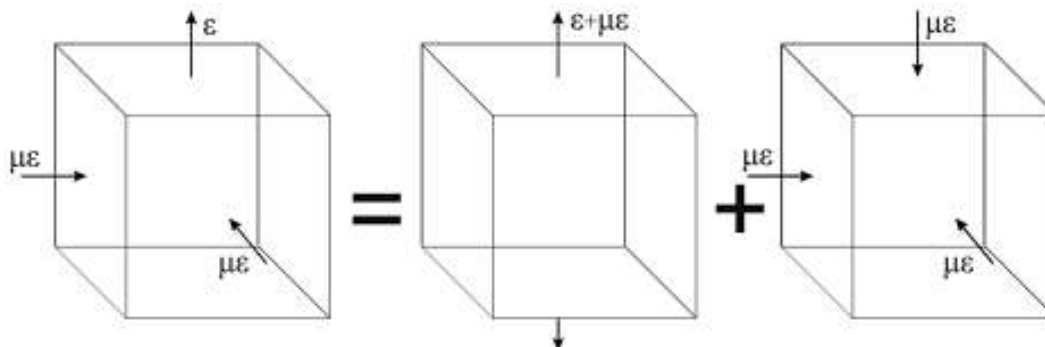


Рис. 2. Разделение деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения и трехосного сжатия

слагаемом напряжения растяжения с величины $E\varepsilon$ (где E – модуль упругости) до величины $E\varepsilon(1+\mu)$. Трехосное сжатие с деформацией $-\mu\varepsilon$ вызовет появление шарового тензора с напряжением сжатия $\sigma=-E\mu\varepsilon/(1-2\mu)$. Тензор не нарушает силовое условие равновесия и одновременно учитывает появление поперечных напряжений.

Полученная в результате нагружения стержня полная удельная потенциальная энергия упругого деформирования равна

$$U_{\pi}=E\varepsilon^2/2. \quad (1)$$

В случае одноосного напряженного состояния эта энергия может быть разделена на энергию, затраченную на изменение объема U_o , и энергию, затраченную на изменение формы стержня U_{ϕ} :

$$U_{\pi}=U_o+U_{\phi}=(1-2\mu)E\varepsilon^2/6+(1+\mu)E\varepsilon^2/3. \quad (2)$$

Отношение энергий зависит от величины коэффициента Пуассона

$$U_{\phi}/U_o=2(1+\mu)/(1-2\mu) \quad (3)$$

и меняется от 2 при $\mu=0$ до ∞ при приближении μ к значению 0,5, например при $\mu=0,33 - U_{\phi}=7,8U_o$.

При вычислении суммарной удельной потенциальной энергии упругого деформирования U_{π}^c слагаемых, представленных в правой части равенства на рис. 2, следует сначала провести сложение деформаций, а только затем проводить расчет, в противном случае будем получать неверные значения в силу того, что квадрат суммы двух положительных чисел всегда больше суммы квадратов слагаемых. В результате имеем равенство энергий $U_{\pi}=U_{\pi}^c$.

Слабым местом в предлагаемой схеме разделения деформированного состояния одноосного растяжения на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения и трехосного сжатия являются высокие значения полученных сжимающих напряжений. Возникающую от этих напряжений силу принято называть пуассоновой силой. Отношение

$$|\sigma_1/\sigma_2|\approx(1-2\mu)/\mu \quad (4)$$

уменьшается с увеличением μ и при значениях коэффициента Пуассона больше 0,33 становится близким к 1, а при $\mu=0,5$ становится равным 0.

Возможен другой вариант определения поперечных напряжений сжатия. Он основан на способности твердого тела сопротивляться изменению исходного объема и формы тела. Упругое объемное напряжение можно связать с изменением потенциальной энергии и объема соотношением [35]

$$\sigma=-dU_o/dV, \quad (5)$$

где dU_o – приращение изменения удельной потенциальной энергии стержня, вызвавшей сжатие (расширение) объема; dV – приращение изменения удельного объема.

Приращение энергии равно работе, затраченной на изменение объема. В случае растяжения стержня энергия изменения удельной потенциальной энергии, вызвавшей расширение объема, составляет $U_o=(1-2\mu)E\varepsilon^2/6$, изменение удельного объема – $V=\varepsilon(1-2\mu)$. В соответствии с формулой (5) получаем $\sigma=E\varepsilon/3$. Аналогичное изменение объема имели бы при трехосном растяжении с $\sigma=E\varepsilon/3$. При этом возникает деформированное состояние, представленное в виде первого слагаемого в правой части рис. 3. Для того чтобы привести деформации в левой части рис. 3 к виду, аналогичному деформациям в левых частях рис. 2 и 4, необходима реализация комбинации деформаций, рассчитанной с помощью обобщенного закона Гука и представленной в правой части рис. 3. Первое слагаемое обеспечивает изменение объема тела, второе – формы тела. Проведем сравнение потенциальных энергий, полученных стержнем в случае одноосного напряженного состояния и комбинарованного нагружения. Для равномерного трехосного растяжения: $U_o=(1-2\mu)E\varepsilon^2/6$, $U_{\phi}=0$. Для одноосного растяжения с двухсторонним равномерным сжатием имеем $U_{\phi}=(1+\mu)E\varepsilon^2/3$, $U_o=0$. Таким образом, получаем равенство потенциальных энергий ($U_{\pi}=U_{\pi}^c$) и отсутствие напряжений в поперечном направлении.

Следует признать, что и эта классическая схема, основанная на разделении деформаций на деформации, вызывающие изменение только объема, и деформации, вызывающие изменение только формы тела, далека от реального процесса деформирования. При одноосном деформировании, как следует из приведенной на рис. 3 схемы,

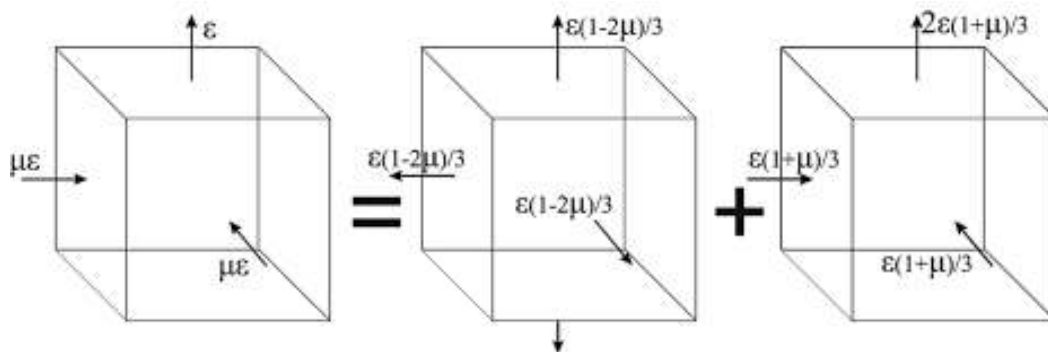


Рис. 3. Разделение деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из равномерного трехосного растяжения и одноосного растяжения с двухосным сжатием

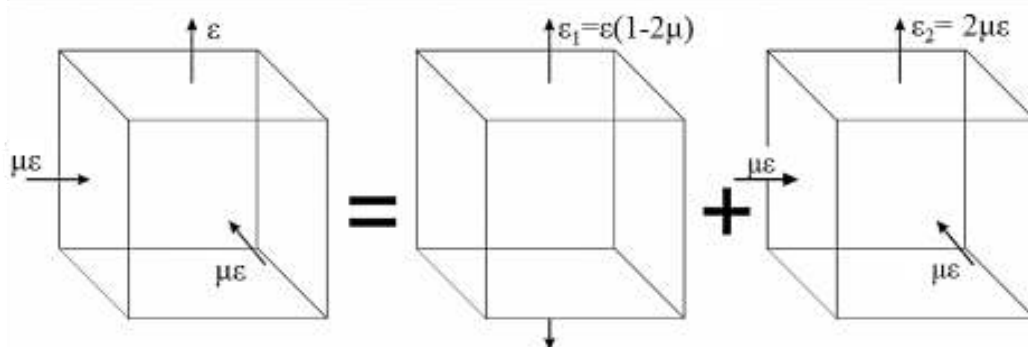


Рис. 4. Разделение деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения и одноосного растяжения с двухосным сжатием

деформации сжатия, возникающие при изменении формы образца, подавляют в поперечных направлениях деформации растяжения, заставляя стержень увеличивать объем только за счет удлинения. Но остается неясным механизм появления в поперечных направлениях деформаций растяжения, отвечающих за увеличение объема. Трехосного растяжения не происходит, поскольку нет условий для его реализации.

Поперечная деформация может образоваться за счет упругих сдвигов, реализующихся от напряженного состояния чистого сдвига при сохранении при этом объема стержня, а также за счет деформации сжатия, вызванной сопротивлением материала увеличению его объема. Получаем, что коэффициент Пуассона является структурно-чувствительной характеристикой, о чем свидетельствуют результаты, представленные в работе [36]. Коэффициент Пуассона отражает изменение строения материала в процессе деформации. При появлении и росте пластической деформации коэффициент Пуассона также увеличивается и достигает значения $\mu=0,5$.

Анализ схем, представленных на рис. 2 и 3, приводит к схеме на рис. 4. На данной схеме деформированное состояние при одноосном растяжении представлено как сумма деформированных

состояний из одноосного растяжения и объемных деформаций. Деформация одноосного растяжения, аналогично схеме на рис. 3, обеспечивает величину увеличения объема стержня. Объемные деформации отвечают за изменение только формы тела. В представленной схеме исключено появление в поперечных направлениях деформаций растяжения, и трехосного растяжения не происходит. Схема на рис. 4 предполагает, что самоуравновешивающиеся поперечные нормальные напряжения возникают от напряженного состояния чистого сдвига (рис. 5). Доказательством появления таких деформаций и напряжений являются пересекающиеся полосы Чернова–Людерса [36–38].

Отношение растягивающего напряжения к сжимающему напряжению определяется величиной коэффициента Пуассона:

$$|\sigma_1/\sigma_2| \approx (1+\mu)/\mu. \quad (6)$$

Графики этого соотношения для схем на рис. 2 и 5 представлены на рис. 6. Отношение напряжений уменьшается с увеличением коэффициента Пуассона и при стремлении μ к 0,5 стремится к 3 в случае основного влияния напряжений от чистого сдвига или к 0 для схемы на рис. 2, когда материал сопротивляется увеличению объема.

Поперечная деформация и, соответственно, пуассонова сила могут образоваться и за счет

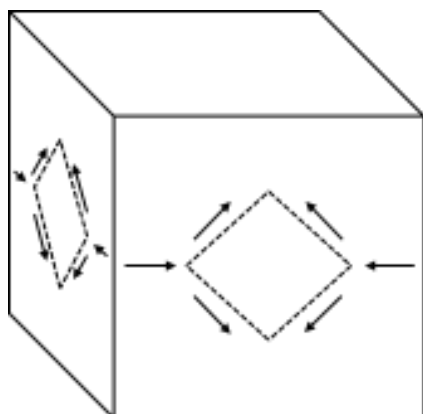


Рис. 5. Возникновение сжимающих нормальных напряжений от напряженного состояния чистого сдвига

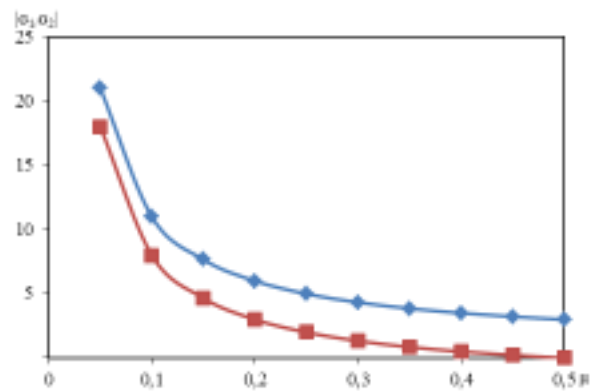


Рис. 6. Зависимость отношения растягивающего напряжения к сжимающему напряжению от величины коэффициента Пуассона:

◆ – по формуле (6); ■ – по формуле (4)

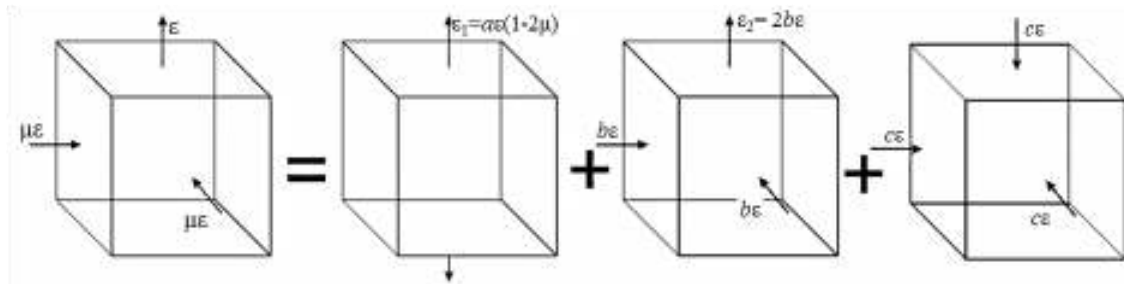


Рис. 7. Разделение деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения, одноосного растяжения с двухосным сжатием и трехосного равномерного сжатия

комбинации деформации упругих сдвигов и деформации сжатия, вызванной сопротивлением материала увеличению его объема. На рис. 7 приведена схема, учитывающая упругие сдвиги и деформации сжатия. По сути, схема на рис. 7 является общей схемой, из которой при соответствующих значениях коэффициентов a , b и c могут быть получены схемы, приведенные на рис. 2–4, а именно при:

1. $a=(1+\mu)/(1-2\mu)$, $b=0$, $c=\mu$ – схема на рис. 2;
2. $a=0$, $b=(1+\mu)/3$, $c=-(1-2\mu)/3$ – схема на рис. 3;
3. $a=1$, $b=\mu$, $c=0$ – схема на рис. 4.

Сравним схемы на рис. 4 и 7. Появление деформации равномерного трехосного сжатия $c\epsilon$ возможно при значениях $a > 1$. Значения a могут быть получены из уравнения

$$a\epsilon(1-2\mu) - \epsilon(1-2\mu) = 3c\epsilon. \quad (7)$$

Рост коэффициента a приводит к увеличению коэффициента c и уменьшению коэффициента b , поскольку $b+c=\mu$. Коэффициенты a , b и c взаимозависимы:

$$a = 1 + 3c/(1-2\mu), \quad b = \mu - c, \quad 0 \leq c \leq \mu. \quad (8)$$

Отношение растягивающего напряжения к сжимающему напряжению при $c \neq 0$ определяется уравнением

$$|\sigma_1/\sigma_2| = [(1-2\mu)(1+\mu)] / [\mu(1+3c-2\mu)], \quad (9)$$

которое при $c \rightarrow 0$ стремится к уравнению (6), а при $c \rightarrow \mu$ стремится к уравнению (4) (рис. 8).

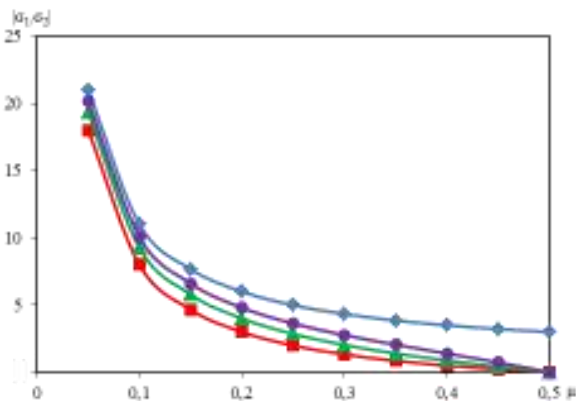


Рис. 8. Зависимость отношения растягивающего напряжения к сжимающему напряжению от величины коэффициента Пуассона и значения коэффициента c :

◆ – по формуле (6); ■ – по формуле (4); ▲ – по формуле (9) при $c=\mu/2$; ● – по формуле (9) при $c=\mu/4$

При одноосном сжатии деформации в схеме на рис. 7 меняют свои направления на противоположные.

Результаты

Применим общую схему разделения деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения, одноосного растяжения с двухосным сжатием, трехосного равномерного сжатия (рис. 7) для получения деформированных состояний при двух- и трехосном нагружении. Согласно обобщенному закону Гука, увеличение удельных потенциальных энергий в теле при изменении его нагружения от одноосного до трехосного вида одинаковым напряжением σ происходит в следующей последовательности:

1. $U_n = \sigma^2/2E = E\epsilon^2/2$ – при одноосном растяжении или сжатии;
2. $U_n = \sigma^2(1-\mu)/E = E\epsilon^2(1-\mu)$ – при двухосном растяжении;
3. $U_n = \sigma^2(1+\mu)/E = E\epsilon^2(1+\mu)$ – при чистом сдвиге;
4. $U_n = 3\sigma^2(1-2\mu)/2E = 3E\epsilon^2(1-2\mu)/2$ – при трехосном растяжении, или

1–4: 1:2(1- μ):2(1+ μ):3(1-2 μ).

Увеличение удельных потенциальных энергий происходит непропорционально числу направлений приложения напряжения и зависит от значения коэффициента Пуассона. Следует отметить, что пропорциональность имела бы место при $\mu=0$. При значениях $0 < \mu < 0,125$ самый энергоопасный вид нагружения – трехосное растяжение, уже при $\mu > 0,125$ им становится чистый сдвиг, при $\mu > 0,25$ за сдвигом идет двухосное растяжение. Механизмы появления таких удельных потенциальных энергий в теле при изменении вида его нагружения становятся очевидными при использовании общей схемы разделения деформированного состояния. На рис. 9 представлена схема получения двухосного растяжения из двух одноосных растяжений. Правые части на рисунке поясняют уменьшение деформаций за счет коэффициента Пуассона, левые части демонстрируют механизм уменьшения суммарной энергии одноосных растяжений за счет сохранения исходной энергии формоизменения.

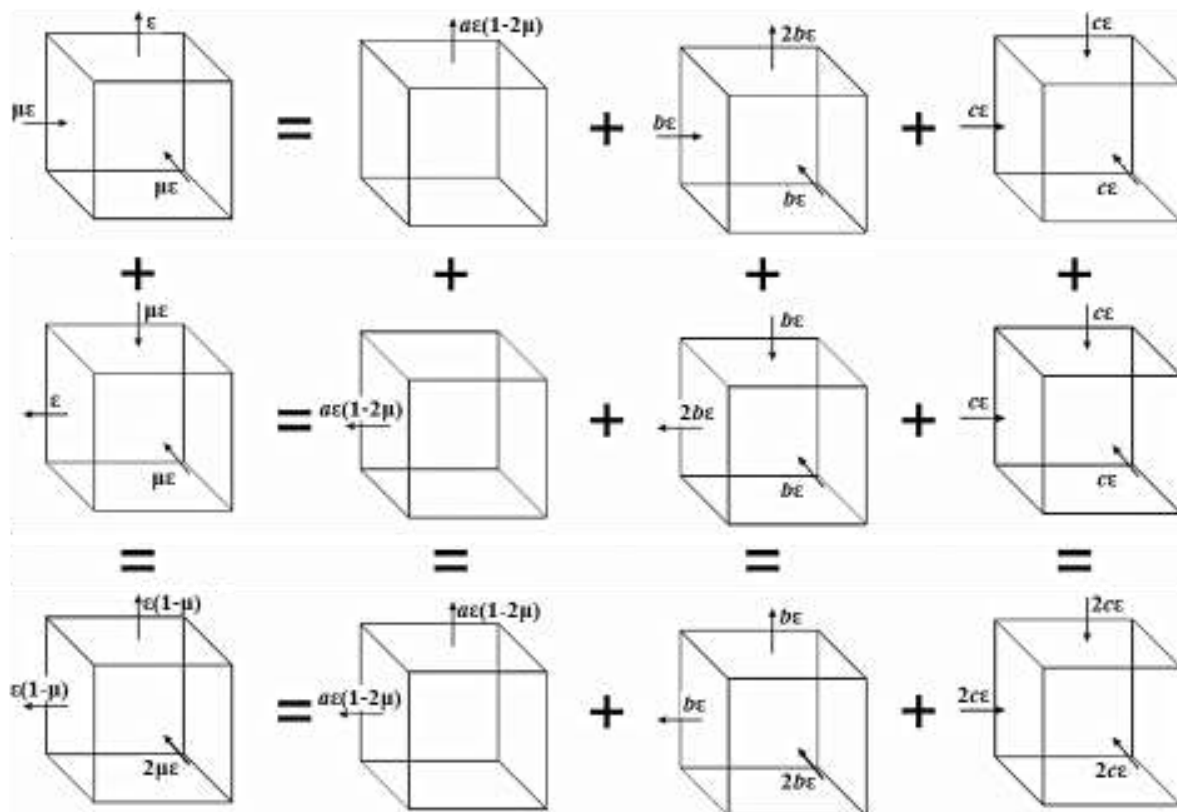


Рис. 9. Схема получения деформаций двухосного растяжения сложением деформаций двух одноосных растяжений

Рассчитаем значения деформаций по значениям коэффициентов a , b и c для двухосного растяжения. Для направлений растяжения с учетом формул (8) получаем

$$a\epsilon(1-2\mu)+b\epsilon-2c\epsilon=\epsilon(1-\mu), \quad (10)$$

для направления сжатия

$$2b\epsilon+2c\epsilon=2\mu, \quad (11)$$

что совпадает с результатом суммирования левых частей уравнений.

При чистом сдвиге расчеты значений деформаций по значениям коэффициентов a , b и c имеют следующие значения:

– для направления растяжения

$$a\epsilon(1-2\mu)+3b\epsilon-2c\epsilon=\epsilon(1+\mu), \quad (12)$$

– для направления сжатия

$$a\epsilon(1-2\mu)+3b\epsilon+2c\epsilon=\epsilon(1+\mu), \quad (13)$$

– для направления, в котором деформация отсутствует,

$$c=0, \quad (14)$$

что, как и в случае двухосного растяжения, совпадает с результатом суммирования левых частей уравнений.

Приведем еще и результаты расчета для трехосного растяжения. Вследствие того, что в этом случае все три направления равнозначны, получаем $b=0$, $c=\mu$ и

$$a\epsilon(1-2\mu)-3c\epsilon=\epsilon(1-2\mu), \quad (15)$$

что совпадает с результатом суммирования левых частей уравнений.

Обсуждение и заключения

Упругое напряженно-деформированное состояние материала в конструкции является основным состоянием для расчетов конструкций на прочность. В соответствии с обобщенным законом Гука, в условиях одноосного растяжения или сжатия изотропного тела в нем появляются деформации в направлениях, перпендикулярных направлению растяжения или сжатия, не вызывающие появления в теле в этом направлении напряжений. Реально эти напряжения и возникающая от них сила, названная пуассоновой силой, существуют, поскольку любое усилие, направленное на изменение положения атомов в теле, вызовет появление в теле упругого объемного напряженно-деформированного состояния. Причиной их отсутствия в теории упругости является используемый для расчета напряжений метод сечений, относящий все возникающие в теле напряжения и деформации к поперечному сечению тела и его продольной деформации. Работа внешней силы и увеличение за ее счет полной удельной потенциальной энергии тела при этом из-за изменения вида напряженно-деформированного состояния не изменяются, а изменяются величины и вид напряжений и деформаций, формирующих эту энергию.

Теоретические исследования условий равновесия деформируемого изотропного тела при упругом растяжении и сжатии позволили разработать

модели появления поперечных деформаций с образованием в теле внутренних объемных взаимоуравновешивающихся напряжений. На основе предложенных моделей разработана схема разделения деформированного состояния при одноосном растяжении на сумму деформированных состояний из одноосного растяжения, одноосного сжатия с двухосным сжатием, трехосного равномерного сжатия. При одноосном сжатии деформации в предложенной схеме меняют свои направления на противо-

положные. Многоосные деформированные состояния могут быть получены сложением состояний одноосного растяжения и одноосного сжатия. Показано применение схемы для описания условий деформирования при двухосном и трехосном растяжении, чистом сдвиге. Наглядно демонстрируется изменение деформаций за счет коэффициента Пуассона и механизм изменения суммарной энергии одноосных напряженных состояний при многоосном деформировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев В.Ф. Усталость металлических материалов. М.: Наука, 2003. С. 37–44.
2. Вильдеман В.Э., Третьяков В.П. Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №2. С. 93–98.
3. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Повреждаемость материалов при статическом растяжении // Авиационные материалы и технологии. 2015. №4 (37). С. 91–94. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-4-91-94.
4. Ерасов В.С., Байрамуков Р.Р., Нужный Г.А. Определение скорости пластической деформации при испытании на растяжение // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. №5. С. 61–63.
5. Махутов Н.А., Москвитин Г.В. Влияние условий нагружения на накопление повреждений и разрушение // Машиностроение. Энциклопедия. М.: Машиностроение, 2010. Т. II-1: Физико-механические свойства. Испытания металлических материалов. С. 220–221.
6. Chan W.S., Wang A.S.D. A study on the effects of the 900 ply on matrix cracks in composite laminates // AIAA/ASME/ASCE/AHC structures, structural: Dynamics and materials conference 27 collection of technical papers. Lanantonio (USA). 1986. Vol. 1. P. 689–694.
7. Chai H., Babcock C.D. Two-dimensional modeling of Compressive Failure in Delaminated laminates // Journal of Composite materials. 1985. Vol. 19. No. 1. P. 67–91.
8. Chen H.P., Doong J.L. Postbuckling behavior of a thick plate // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. No. 8. P. 1157–1161.
9. Hahn H.T., Williams J.F. Compression failure mechanisms in unidirectional composites // Compos. Mater: 7-th Test. and Des. Conf. (Philadelphia, April 2–4, 1984). Philadelphia, 1986. P. 115–139.
10. Relfshider K.L., Highsmith A.L. On delamination and the damage localization process // Fract. Fibl. Compos: ASME/ASSE Mech. Conf. (Albugucrgue, June 24–26, 1985). New York, 1985. P. 71–87.
11. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // International Journal of Fracture. 1988. Vol. 36. P. 101–119.
12. Well N.A. Large Deflections of Elliptical Plates // Journal of applied Mechanics. 1956. Vol. 23. No. 1. P. 21–26.
13. Yin W.-L., Fei Z. Delamination buckling and growth in a champed circular plate // AIAA Journal. 1988. Vol. 26. No. 4. P. 438–445.
14. Yin W.-L., Wang J.T.S. The energy-release rate in the growth of a one-dimensional delamination // Journal of applied Mechanics. 1984. Vol. 51. P. 939–941.
15. Buchanan G.R., Hung Y.K., Chin H.J. Nonlinear analysis for a champed bar // Transactions of the American society of Mechanical Engineers. 1969. Vol. 36. No. 2. P. 355–357.
16. Bochkarev A.O., Grekov M.A. The influence of the surface stress on the local buckling of a plate with a circular nanohole // Proceedings of International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov // Proceedings IEEE. 2015. P. 367–370.
17. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 46–47.
18. Bochkarev A.O., Grekov M.A. On symmetrical and antisymmetrical buckling of a plate with circular nanohole under uniaxial tension // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9. No. 125. P. 6241–6247.
19. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкции. М.: Мир, 1971. С. 77.
20. Бочкарев А.О., Греков М.А. Локальная потеря устойчивости пластины с круговым наноотверстием при одноосном растяжении // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. №3. С. 282–285.
21. Соловьев А.С., Бочкарев А.О. Устойчивость кольцевой пластины при растяжении сосредоточенными силами // Вестник СПбГУ. Сер.: Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 136–145.
22. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. С. 272–273.
23. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г. и др. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 184 с.
24. Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. Об устойчивости пластины наноразмерной толщины, ослабленной круговым отверстием // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458. №2. С. 158–160.

25. Бочкарев А.О., Даль Ю.М. Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308. №2. С. 312–315.
26. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // Авиационные материалы и технологии. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
27. Каблов Е.Н. Материалы нового поколения – основа инноваций, технологического лидерства и национальной безопасности России // Интеллект и технологии. 2016. № 2 (14). С. 16–21.
28. Каблов Е.Н. Материалы нового поколения // Защита и безопасность. 2014. №4. С. 28–29.
29. Каблов Е.Н. Современные материалы – основа инновационной модернизации России // Металлы Евразии. 2012. №3. С. 10–15.
30. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Деформация и разрушение как процессы изменения объема, площади поверхности и линейных размеров в нагружаемых телах // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2016. №8 (44). Ст. 11. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 01.10.2018). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-8-11-11.
31. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Площадь свободной поверхности как критерий хрупкого разрушения // Авиационные материалы и технологии. 2017. №2 (47). С. 69–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-2-69-79.
32. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Силовой, деформационный и энергетический критерии разрушения // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2017. №10 (58). Ст. 11. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 01.10.2018). DOI: 10.18577/2307-6046-2017-0-10-11-11.
33. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Образование новых поверхностей в твердом теле на стадиях упругой и пластической деформаций, начала и развития разрушения // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2018. №2 (62). Ст. 12. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 01.10.2018). DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-2-12-12.
34. Кузьменко В.А. Новые схемы деформирования твердых тел. Киев: Наукова думка, 1973. С. 44–53.
35. Краус Е.И. Малопараметрическое уравнение состояния твердого вещества при высоких плотностях энергии // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер.: Физика. 2007. Т. 2. Вып. 2. С. 65–73.
36. Рудаков В.Н., Дорофеев В.С., Абракитов Д.В. Об эффекте реализации физических свойств наноструктуры традиционных конструкционных материалов при проектировании несущих элементов универсального назначения // Вісник ОДАБА. 2013. №50. Ч. 2. 9 с. URL: <http://mx.ogasa.org.ua/handle/123456789/2021> (дата обращения: 01.10.2018).
37. Шибков А.А., Золотов А.Е., Желтов М.А. и др. Динамика деформационных полос и разрушение алюминий-магниевого сплава АМг6 // Физика твердого тела. 2011. Т. 53. №10. С. 1873–1878.
38. Шибков А.А., Золотов А.Е., Желтов М.А., Денисов А.А. Деформационный хаос и самоорганизация на стадии предразрушения сплава АМг6 // Физика твердого тела. 2011. Т. 53. №10. С. 1879–1884.