

УДК 517.25

Е.И. Орешко<sup>1</sup>, В.С. Ерасов<sup>1</sup>, А.Н. Луценко<sup>1</sup>

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТОВ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79

*Рассмотрены вопросы расчетов устойчивости стержней и пластин в зависимости от их геометрических параметров. Применен метод конечных элементов для расчета устойчивости стержней и пластин. Анализ полученных результатов расчетов позволил определить факторы, влияющие на устойчивость стержней и пластин. Определены границы применимости формул для расчета критической силы потери устойчивости стержней и пластин.*

**Ключевые слова:** расчет устойчивости, пластина, стержень, метод конечных элементов, критическая сила потери устойчивости.

*Questions of stability of cores and plates depending on their geometrical parameters are considered. The finite element method is applied for calculating the stability of the cores and plates. Analysis of the results of these calculations allowed us to determine the factors affecting the stability of the cores and plates. Limits of formulas applicability for the critical force calculation of the cores and plates stability loss are defined.*

**Keywords:** stability calculation, plate, core, finite element method, critical force for buckling.

<sup>1</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal state unitary enterprise «All-Russian scientific research institute of aviation materials» State research center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

**Введение**

Для оптимального проектирования машин и конструкций необходимо знание условий, при которых в материале будут достигнуты предельные состояния при статических и циклических режимах эксплуатационного нагружения [1–3].

Теоретически всякая упругая система при определенных условиях нагружения может перейти в неустойчивое состояние равновесия. Поскольку модуль упругости металлических конструкций велик по сравнению с пределом упругости, то, возможно, что эти элементы становятся неустойчивыми в упругой области только при значительных упругих деформациях. Это имеет место, когда по крайней мере один или два размера сжатого элемента являются малыми по сравнению с третьим размером – как, например, в случае гибких стержней или тонких пластинок. Однако вследствие быстрого уменьшения модуля упругости при переходе через предел упругости, диапазон нагрузок, при которых может возникнуть неустойчивое состояние при обычных условиях нагружения, значительно расширяется. Частично нарушение внутренней структуры материала после перехода предела упругости ускоряет начало критического состояния выпучивания. Этот факт объясняет то важное положение, которое занимают проблемы устойчивости при расчете металлических конструкций [4].

Пластиной называется призматическое тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими

характерными размерами. Это расстояние называется толщиной  $h$ . Плоскость, равноудаленная от поверхностей пластины, называется срединной плоскостью. К срединной плоскости привязана одна из координатных плоскостей декартовой координатной системы (рис. 1).

Пластина называется тонкой, если  $(h/b)^2 < 1$ . Тонкие пластины в рамках их упругого деформирования подразделяются на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие. Если упругий прогиб  $w$  таков, что  $(w/h) \leq 0,25$ , то пластина жесткая. В этом случае деформации срединного слоя пластины пренебрежимо малы и в расчетах их можно не учитывать. Несущие свойства пластины обеспечиваются лишь ее жесткостью при изгибе.

При  $0,25 \leq w/h \leq 1$  – пластина гибкая. Деформации срединного слоя пластины сравнимы с деформациями изгиба и пренебрегать ими нельзя.

Если пластина деформируется упруго при прогибах, значительно превышающих толщину  $(w/h) > 1$ , то такая пластина абсолютно гибкая (мембрана). Ее несущие свойства обусловлены наличием напряжений в срединном слое.

Деление пластин на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие в значительной степени условно. Поведение пластины под нагрузкой определяется не только ее геометрическими параметрами. Величина упругих деформаций существенно зависит от механических свойств материала пластины и условий ее закрепления.

Если при деформации пластины в ее срединном слое возникают мембранные усилия, то наря-

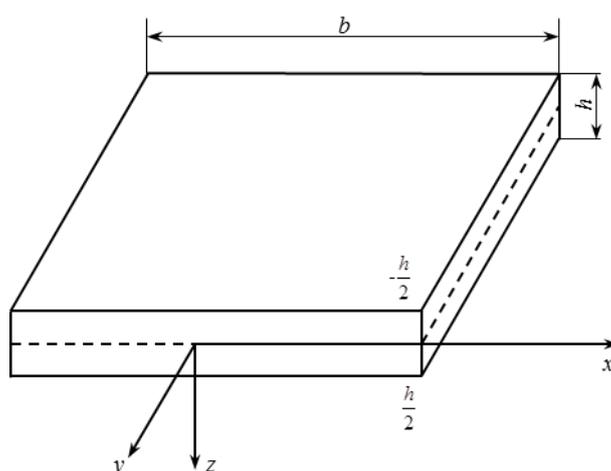


Рис. 1. Геометрические параметры пластины:  
 $a$  – длина;  $b$  – ширина;  $h$  – толщина

ду с расчетом на прочность необходимо проводить расчет на устойчивость.

Мембранные усилия представляют собой растягивающие, сжимающие и сдвигающие усилия, приведенные к срединному слою пластины.

Расчет на устойчивость предполагает нахождение критических значений мембранных усилий и соответствующих им внешних нагрузок, при которых пластина меняет форму равновесного состояния. Предположим, что в срединной плоскости пластины действует внешняя сжимающая нагрузка интенсивности  $P$ .

При значениях нагрузки меньше некоторой величины  $\bar{p}$  пластина остается плоской. Дадим нагрузке  $\bar{p}$  бесконечно малое приращение  $\Delta p$ . Пластина при этом переходит в другое – изогнутое – равновесное состояние, т. е. теряет устойчивость. Таким образом, при нагрузке меньше  $\bar{p}$  пластина находится в плоском – устойчивом – равновесном состоянии. При  $p = \bar{p}$  возможны два равновесных состояния пластины, а именно: плоское неустойчивое, либо изогнутое, но устойчивое. Нагрузка  $\bar{p}$  называется критической. При потере устойчивости пластина принимает такую изогнутую форму, которой соответствует минимум потенциальной энергии деформации. Бесконечно малому приращению нагрузки  $\Delta p$  соответствуют бесконечно малые приращения прогиба  $\delta w$  и функции усилий  $\delta F$ . Полный прогиб пластины, таким образом, равен  $w + \delta w$ , где  $w$  – величина прогиба к моменту потери устойчивости (докритическое значение прогиба). По аналогии и функция усилий равна  $F + \delta F$ .

Для расчета устойчивости гибких стержней в упругой области существует формула Эйлера, по которой критическая сила потери устойчивости зависит от длины, ширины и толщины стержня. Для расчета устойчивости пластин существует формула, по которой критическая сила потери

устойчивости зависит от ширины, толщины пластины и коэффициента, который определяется графически – в зависимости от отношения длины к ширине пластины. Так, в работах [5, 6] и др. предлагают применять формулу для расчета устойчивости пластины при отношении длины объекта ( $a$ ) к его ширине ( $b$ ), равному числу, лежащему в интервале  $0,5 < a/b < 5$ . При некоторых геометрических параметрах пластины для расчета ее устойчивости при сжатии можно использовать как формулу Эйлера для стержней, так и формулу для пластин. В связи с этим в данной работе рассмотрены особенности расчетов стержней и пластин с различной геометрической формой и определены границы применимости формул для расчета критической силы потери устойчивости.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного научного направления 3.1. «Компьютерное конструирование и моделирование композиций литейных и деформируемых сплавов и сталей, включая естественные композиты и интерметаллиды, процессов их изготовления и переработки» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [2].

### Материалы и методы

Для расчетов устойчивости в упругой области стержней и пластин с разной геометрической формой использовали формулу Эйлера для стержней и формулу для расчета устойчивости пластин.

На стержень вдоль его оси действуют сжимающие сосредоточенные на концах силы  $P$ . Критические напряжения потери устойчивости стержня для различных закреплений концов в упругой области вычисляются по формуле [5]:

$$\sigma_{кр} = c\pi^2 E / (L/i)^2 = \pi^2 E / (\mu L/i)^2 = \pi^2 E / \lambda^2, \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент устойчивости стержня;  $\mu=1/\sqrt{c}$  – коэффициент приведенной длины (коэффициенты  $c$  и  $\mu$  зависят от типа закрепления концов стержня (табл. 1));  $L/i$  – гибкость стержня;  $\lambda=\mu L/i$  – приведенная гибкость стержня;  $i=\sqrt{J_{\min}/F}$  – минимальный радиус инерции сечения стержня ( $J_{\min}$  и  $F$  – минимальный момент инерции и площадь сечения).

В случае пластической деформации:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \xi / \lambda^2, \quad (2)$$

где  $\xi = \frac{E_k(\sigma_{кр})}{E}$  – коэффициент пластичности, равный  $\xi \leq 1$  ( $\xi=1$  в области упругости).

Критические напряжения  $\sigma_{кр}$  для стержня в упругой области и за пределами упругости определяют по кривой устойчивости в зависимости от параметра  $\lambda/\pi$ .

Критическую силу  $P_{кр}$  определяют по формуле:

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A, \quad (3)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Таким образом, формула для определения критической силы стержня  $P_{кр}$  принимает следующий вид:

$$P_{кр} = \frac{E \pi^2 J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (4)$$

где  $l$  – длина стержня;  $\mu$  – коэффициент приведенной длины, который зависит от типа закрепления концов стержня;  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $J_{\min}$  – минимальный момент инерции, для прямоугольного сечения

$$J_{\min} = \frac{bh^3}{12}, \quad (5)$$

где  $b$  – ширина;  $h$  – толщина.

На пластину по направлению оси  $X$  действуют сжимающие равномерно распределенные напряжения  $\sigma_x$ . Длинную сторону пластины обозначим  $a$ , короткую сторону –  $b$ . Критические напряжения потери устойчивости пластины вычисляют по формуле:

$$\sigma_{кр} = K_3 \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left( \frac{\delta}{b} \right)^2, \quad (6)$$

где  $\delta$  – толщина пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $K_3$  – коэффициент устойчивости (обозначение М.Ф. Астахова [5]).

Исторически был введен коэффициент устойчивости  $K$ , усредненный по материалам (для  $\mu_{кр}=0,293$ ):

$$K = K_3 \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} = 0,9 K_3. \quad (7)$$

Приближенная формула для критического напряжения пластины принимает простой вид:

$$\sigma_{кр} = KE \left( \frac{\delta}{b} \right)^2. \quad (8)$$

Критическая сила потери устойчивости пластины определяется по формуле

$$P_{кр} = KE \frac{\delta^3}{b}, \quad (9)$$

где  $\delta$  – толщина пластины;  $b$  – ширина пластины;  $K$  – усредненный коэффициент устойчивости, равный  $0,9 K_3$ , где  $K_3$  – коэффициент устойчивости, который зависит от соотношения сторон  $a/b$  (длины к ширине) и от условий закрепления каждой из сторон пластины (свободный край, шарнирное опирание, заделка).

Значения коэффициента  $K_3$  для шарнирного закрепления кромок приведены на рис. 2.

Уточненная для конкретного материала формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{кр} &= \frac{\pi^2}{0,9 \cdot 12 \cdot (1-\nu^2)} KE \left( \frac{\delta}{b} \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2}{0,9 \cdot 12 \cdot (1-\nu^2)} \frac{E}{\left( \frac{b}{\delta \sqrt{K}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Множитель  $\frac{\pi^2}{0,9 \cdot 12 \cdot (1-\nu^2)} \approx 1$  (точно равен 1 при  $\nu=0,293$ ).

Критические напряжения для пластины в упругой области и за пределами упругости определяют по кривой устойчивости в зависимости от параметра  $\frac{b}{\delta \sqrt{K}}$ .

Кривая устойчивости соответствует материалу пластины:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2}{0,9 \cdot 12 \cdot (1-\nu^2)} \frac{E \sqrt{\xi}}{\left( \frac{b}{\delta \sqrt{K}} \right)^2}, \quad (11)$$

где  $\xi = \frac{E_k}{E}$  – коэффициент пластичности, равный  $\xi \leq 1$  ( $\xi=1$  в области упругости).

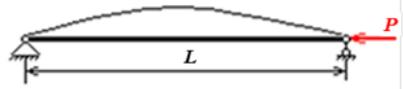
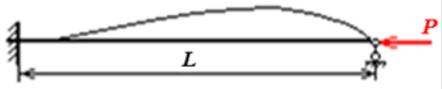
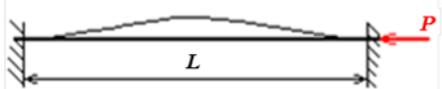
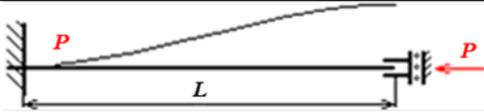
Для расчетов устойчивости пластин и стержней также был использован конечно-элементный программный комплекс ANSYS, позволяющий проводить различные расчеты (статический, динамический, гармонический, модальный, спектральный, расчет устойчивости) напряженно-деформированного состояния в зависимости от граничных условий – приложенных нагрузок, моментов, степеней свободы и т. п. [7–14].

### Результаты

Проведенные ранее исследования показали, что расхождение результатов расчетов устойчивости стержней при сжатии в конечно-элементном программном комплексе и результатов расчетов

Таблица 1

Значения коэффициента  $\mu$  для стержня, нагруженного на концах

Схема	Характер закрепления концов стержня	Коэффициент приведенной длины $\mu$
	Оба конца стержня опираются на шарниры	1
	Стержень с одним заделанным концом, вторым опирается на шарнир	0,699
	Стержень с заделанными концами	0,5
	Один конец заделан, второй свободен	2
	Один конец заделан, на другом – подвижная в продольном и поперечном направлении заделка	1
	Концы не поворачиваются, но могут перемещаться в поперечном направлении	1

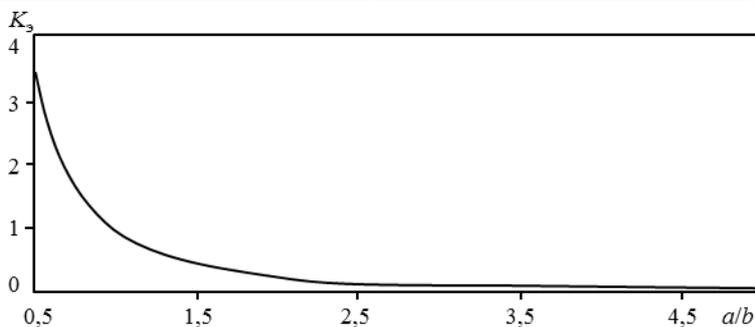


Рис. 2. Значения коэффициентов  $K_3$  для шарнирного закрепления кромок пластины в зависимости от соотношения  $a/b$  (длина/ширина) [5]

по формуле Эйлера составляет ~1%, что свидетельствует об адекватности математической модели и возможности ее применения для проводимого исследования [15]. Поэтому в программном комплексе ANSYS построили конечно-элементные модели пластин (модуль упругости 79 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3) с различными геометрическими параметрами в случае шарнирного закрепления кромок, которые нагружали линейным вектором силы (рис. 3).

В результате расчета получали значение критической силы потери устойчивости и определяли погрешность результатов расчетов по формулам (4) и (9) относительно результатов расчетов в программе ANSYS (табл. 2).

Расчеты показали, что в случае шарнирного закрепления кромок при соотношении  $a/b$  (длина/ширина) пластины (стержня), равном 2, результаты расчетов критической силы потери устойчивости по формулам (4) и (9) близки по значениям. С увеличением  $a/b$  от значения, равного 2, погрешность расчетов по формуле (4) уменьшается, а погрешность расчетов по формуле (9) увеличивается. При уменьшении  $a/b$  от значения, равного 2, наблюдается обратная тенденция.

Таким образом, при соотношении длины к ширине пластины  $a/b \leq 2$  критическую силу потери устойчивости предлагается рассчитывать по формуле (9). Если  $a/b \geq 2$ , то критическую силу потери устойчивости пластины предлагается рассчитывать по формуле (4).

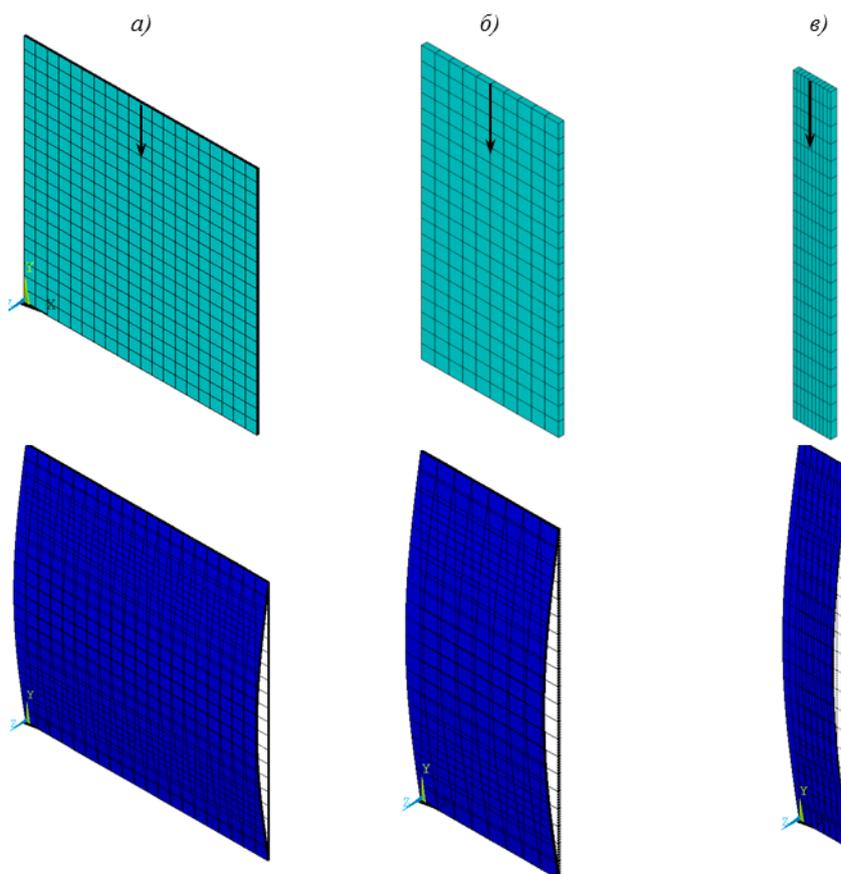


Рис. 3. Первая форма потери устойчивости пластины с различными геометрическими параметрами (ширина×толщина×длина) при сжатии линейным вектором силы в случае шарнирного закрепления кромок, рассчитанной с помощью метода конечных элементов при толщине 0,1 м, длине 0,002 м и ширине 0,1 (а); 0,05 (б) и 0,0125 м (в)

Таблица 2

**Сравнение аналитических расчетов стержней и пластин с расчетами с помощью метода конечных элементов (МКЭ)**

$K_3$	$a/b$	Ширина	Толщина	Длина	$P_{кр}, Н$			Погрешность значений $P_{кр}, \%$ , по формуле	
					пластины	стержня	ANSYS	(9)	(4)
		м							
0,99	1	0,1	0,002	0,1	5631	5214	5622	0,2	7,3
0,71	1,18	0,085	0,002	0,1	4751	4432	4722	0,6	6,1
0,54	1,33	0,075	0,002	0,1	4095	3911	4124	0,7	5,2
0,4	1,54	0,065	0,002	0,1	3500	3389	3536	1	4,2
0,23	2	0,05	0,002	0,1	2617	2607	2678	2,3	2,7
0,23	2	0,05	0,007	0,1	112182	111775	112930	0,7	1
0,14	2,5	0,04	0,002	0,1	1991	2086	2123	6,2	1,8
0,076	3,33	0,03	0,002	0,1	1441	1564	1580	8,8	1
0,034	4,76	0,021	0,002	0,1	921	1095	1100	16,3	0,46

**Обсуждение и заключения**

В работе рассмотрены вопросы расчетов устойчивости стержней и пластин в зависимости от их геометрических параметров.

Проведены расчеты критической силы потери устойчивости пластин по формулам (4) и (9), которые при некоторых геометрических параметрах пластин показали близкие результаты. В связи с

этим для расчетов устойчивости пластин с целью определения границ применимости формул (4) и (9) использовали конечно-элементный программный комплекс ANSYS. Определяли погрешность результатов расчетов по формулам (4) и (9) относительно результатов расчетов в программе ANSYS (табл. 2).

Расчеты показали, что при соотношении длины к ширине пластины, равном 2, результаты расчетов критической силы потери устойчивости по формулам (4) и (9) близки по значениям.

С увеличением соотношения длины к ширине пластины от значения, равного 2, погрешность расчетов по формуле (4) уменьшается, а погрешность расчетов по формуле (9) увеличивается. При уменьшении соотношения длины к ширине

пластины от значения, равного 2, наблюдается обратная тенденция.

Таким образом, при соотношении длины к ширине пластины менее 2 критическую силу потери устойчивости предлагается рассчитывать по формуле (9). При соотношении длины к ширине пластины более 2 критическую силу потери устойчивости предлагается рассчитывать по формуле Эйлера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н., Гращенко Д.В., Ерасов В.С., Анчевский И.Э., Ильин В.В., Вальтер Р.С. Стенд для испытаний на климатической станции ГЦКИ крупногабаритных конструкций из ПКМ // Сб. докл. IX Междунар. науч. конф. по гидроавиации «Гидроавиасалон-2012». 2012. С. 122–123.
2. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
3. Каблов Е.Н. *Авиакосмическое материаловедение // Все материалы. Энциклопедический справочник*. 2008. №3. С. 2–14.
4. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. Пер. с англ. М., 1959. С. 18.
5. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. М.: Гос. изд-во оборонной пром-сти, 1954. С. 411–412.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник в 3-х т. / под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. С. 94.
7. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н., Терентьев В.Ф., Слизов А.К. Построение диаграмм деформирования в трехмерном пространстве  $\sigma$ - $\varepsilon$ - $t$  // *Авиационные материалы и технологии*. 2017 (в печати).
8. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа // *Математическое моделирование и численные методы*. 2015. №2. С. 3–22.
9. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №3 (42). С. 33–48. DOI: 10.18577/2071-9240-2016-0-3-33-48.
10. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Математическое моделирование деформирования конструкционного углепластика при изгибе // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №2 (41). С. 50–59. DOI: 10.18577/2071-9240-2016-0-2-50-59.
11. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю., Луценко А.Н. Расчет на прочность гибридной панели крыла на базе листов и профилей из высокопрочного алюминий-литиевого сплава и слоистого алюмокомпозитного пластика // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №1 (40). С. 53–61. DOI: 10.18577/2071-9240-2016-0-1-53-61.
12. Гусев Д.Е., Коллеров М.Ю., Рудаков С.С., Королев П.А., Орешко Е.И. Оценка биомеханической совместимости имплантируемых опорных пластин из сплавов на основе титана и никелида титана методом компьютерного моделирования // *Титан*. 2011. №3 (33). С. 39–44.
13. Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Экспериментально-теоретическое обоснование выбора метода и имплантатов для устранения воронкообразной деформации грудной клетки // *Научные труды (Вестник МАТИ)*. 2012. №19 (91). С. 331–336.
14. Коллеров М.Ю., Усиков В.Д., Куфтов В.С., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Медико-техническое обоснование использования титановых сплавов в имплантируемых конструкциях для стабилизации позвоночника // *Титан*. 2013. №1 (39). С. 39–45.
15. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Выбор схемы расположения высокоемкостных слоев в многослойной гибридной пластине для ее наибольшего сопротивления потере устойчивости // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №S4. С. 109–117. DOI: 10.18577/2071-9240-2014-0-s4-109-117.