

УДК 678.747.2:620.177

Е.И. Орешко¹, В.С. Ерасов¹, А.Н. Луценко¹**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
КОНСТРУКЦИОННОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ ИЗГИБЕ**

DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-2-50-59

Рассмотрено численное математическое моделирование деформирования конструкционного углепластика при изгибе. В математической модели деформирования конструкционного углепластика использованы коэффициенты уравнения деформирования полимерной матрицы и армирующего наполнителя. Математическая модель учитывает разносопротивляемость слоев деформациям растяжения и сжатия, возникающим при изгибе.

Для учета возможного разброса объемного содержания арматуры проведены расчеты для образцов из конструкционного углепластика ВКУ-25 с объемным содержанием наполнителя 0,65 и 0,55%.

Для сравнения разработанной математической модели с известными моделями построены диаграммы деформирования конструкционного углепластика при трехточечном изгибе с применением конечно-элементного программного комплекса.

Проведено сравнение экспериментальных и модельных диаграмм деформирования при трехточечном изгибе образца конструкционного углепластика ВКУ-25.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного научного направления 3.3. «Технология прогнозирования свойств, моделирования и реализации современных процессов конструирования и производства изделий из неметаллических и композиционных материалов с использованием цифровых методов, совместимых с CAD/CAM/CAE и PLM системами» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [1].

Ключевые слова: наполнитель, полимерная матрица, композиционный материал, математическая модель, трехточечный изгиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, продольное перемещение, прогиб, метод конечных элементов.

The article presents the numerical mathematical modeling simulation of bending carbon fiber. In the mathematical model of deformation of constructional carbon fiber were used, the coefficients of the equations of deformation of a polymeric matrix and a reinforcing filler. The mathematical model considers the different resistance of sintered layers deformation in tension and compression, resulting in bending.

To account for possible variation of the volume content of reinforcement calculations were carried out for samples from constructional carbon-fiber VKU-25 with a volume content of filler 0,65 and 0,55%.

To compare the developed mathematical model with known models strain diagrams of constructional carbon in three-point bending using finite element software are constructed.

Comparison of the experimental and model deformations curve in three-point bending sample constructional carbon VKU-25 is conducted.

Work is executed within implementation of the complex scientific direction 3.3. «Technology of forecasting of properties, modeling and implementation of modern processes of designing and production of products from non-metallic and composite materials with use of the digital methods compatible to CAD/CAM/CAE and PLM by systems» («The strategic directions of development of materials and technologies of their processing for the period till 2030») [1].

Keywords: filler, polymer matrix composite material, a mathematical model, three-point bending, shear force, bending moment, longitudinal displacement, deflection, finite element method.

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal state unitary enterprise «All-Russian scientific research institute of aviation materials» State research center of the Russian Federation] E-mail: admin@viam.ru

Введение

Основным классом материалов, удовлетворяющих жестким, часто противоречащим друг другу требованиям, таким как обеспечение минимальной массы конструкций, высокой прочностью,

жесткости, надежности и долговечности при работе в сложных условиях нагружения, в том числе при повышенных температурах и в агрессивных средах, являются композиты [1–4], среди которых широкое распространение получили углепласти-

ки, в которых механические свойства волокна определяют высокие прочностные характеристики композита, а матрица обеспечивает коррозионную стойкость и высокую ударную вязкость [5–8].

В связи с этим в настоящее время в отечественной авиации существует потребность в создании и совершенствовании расчетных методов проектирования и оптимизации элементов конструкций из конструкционных углепластиков, которые позволят качественно улучшить свойства конструкций летательных аппаратов: снизить их материалоемкость, повысить прочность и надежность [9–12].

В данной работе рассмотрен один из таких расчетных методов – численное математическое моделирование деформирования конструкционно-углепластика при изгибе.

Процесс численного математического моделирования полимерных композиционных материалов (ПКМ) состоит из ряда этапов. Прежде всего это построение физической и математической моделей объекта исследования, разработка численных алгоритмов и проведение численных экспериментов, сравнение полученных данных с результатами натуральных экспериментов (рис. 1).

На первом этапе рассмотрим особенности испытания материалов на трехточечный изгиб, который является одним из стандартных методов определения механических свойств материалов (ГОСТ 25.604, ГОСТ 4648). В этом испытании образец в форме балки помещают на две опоры, расстояние между которыми (база) равно L , так, чтобы основная часть образца находилась между опорами. При этом часть образца должна выходить за рамки базы (рис. 2), что позволяет иметь в районе самих опор запас для возможных продольных перемещений образца. В середине пролета между опорами, сверху образца на него с силой P давит пуансон, напротив которого (снизу образца) находится конец шупа датчика деформации. В ходе испытания происходит увеличение прогиба образца с постоянной скоростью деформирования вплоть до момента его разрушения, при этом датчик перемещения фиксирует прогиб образца w в середине пролета, а динамометр – прилагаемую силу. Записывается массив данных: продолжительность испытания, перемещение по датчику и нагрузка.

Следует отметить, что при достаточно больших деформациях растет область соприкосновения образца с пуансоном, передающим нагрузку, как из-за изгиба образца, так и из-за возникающих в нем локальных деформаций (рис. 3).

При описанном виде нагружения и закрепления образца со стороны приложения нагрузки возникают деформации сжатия в продольном направлении, а на противоположной стороне образца – деформации растяжения. Если материал образца имеет разное сопротивление растяжению и сжатию, что типично для большинства полимеров, то при создании модели испытания возникает необходимость учета этой особенности.

Материалы и методы

Для создания математической модели испытания на трехточечный изгиб рассмотрим образец как балку прямоугольного поперечного сечения размером $b \times 2H$ с пролетом L между опорами A и B (рис. 4).

В данной модели можно пренебречь формой пуансона и опор, полагая возникающие нагрузки P и реакции опор R_A и R_B – сосредоточенными. Кроме того, пренебрегаем возможной неоднородностью деформаций в поперечном направлении. Рассмотрим более общую задачу, в которой точка приложения нагрузки находится на расстоянии a от левой опоры. Таким образом, стандартные испытания будут описываться с помощью этой модели при значении параметра $a=L/2$.

Вследствие очень малых скоростей деформирования, состояние равновесия достаточно точно описывает изгиб балки в рассматриваемой задаче. Напряженно-деформированное состояние балки характеризуется следующими величинами:

- $Q(x)$ – перерезывающая сила;
- $M(x)$ – изгибающий момент;
- $N(x)$ – продольное усилие;
- $u(x), w(x)$ – продольное перемещение и прогиб;
- x – координата, отсчитываемая от левой опоры, – a (рис. 5).

Соответствующие уравнения имеют вид [13]:

$$\frac{dN(x)}{dx}=0; \quad \frac{dQ(x)}{dx}=0; \quad \frac{dM(x)}{dx}=Q. \quad (1)$$

Реакции опор определяются равенствами:

$$N=0; \quad R_A=\frac{P \cdot c}{L}; \quad R_B=\frac{P \cdot a}{L} \quad (c=L-a),$$

с учетом чего получаем решение системы (1) для безмоментного в точках опирания состояния ($M(0)=0; M(L)=0$):

$$N=0, \quad \begin{cases} Q=\frac{P \cdot c}{L}; & M(x)=\frac{P \cdot c}{L}x, \text{ при } 0 \leq x \leq a \\ Q=-\frac{P \cdot a}{L}; & M(x)=-\frac{P \cdot a}{L}(x-L), \text{ при } a < x \leq L. \end{cases} \quad (2)$$

Для распределения деформаций по толщине балки принимаем кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява [13], в соответствии с которыми

$$\varepsilon(x)=e(x)+zk(x); \quad (3)$$

$$e(x)=\frac{du}{dx}; \quad k(x)=-\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (4)$$

Из вышеизложенного следует, что рассматриваемый вид нагружения приводит к появлению в балке деформаций сжатия и растяжения, границу раздела которых обозначим z_0 . Деформации балки будут отрицательными при $z_0 < z \leq H$, а при $z_0 > z \geq -H$ – положительными (рис. 6).

В линейном случае связь между осредненными напряжениями и деформациями в углепластике записывается в виде:

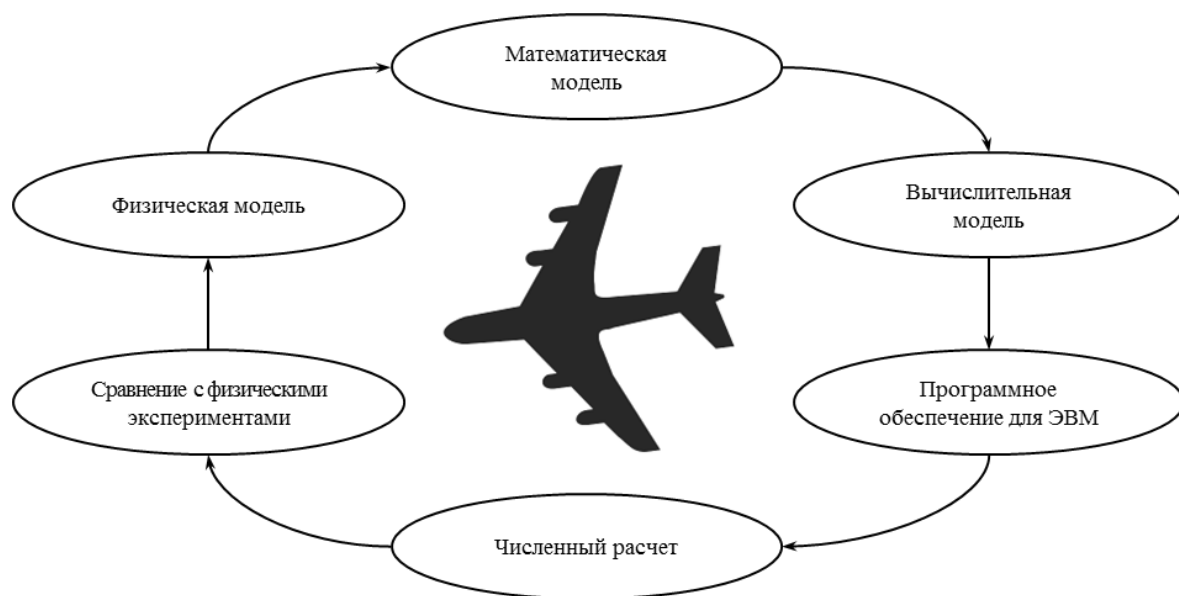


Рис. 1. Замкнутый цикл математического моделирования полимерных композиционных материалов (ПКМ) и разнообразных конструкций из них

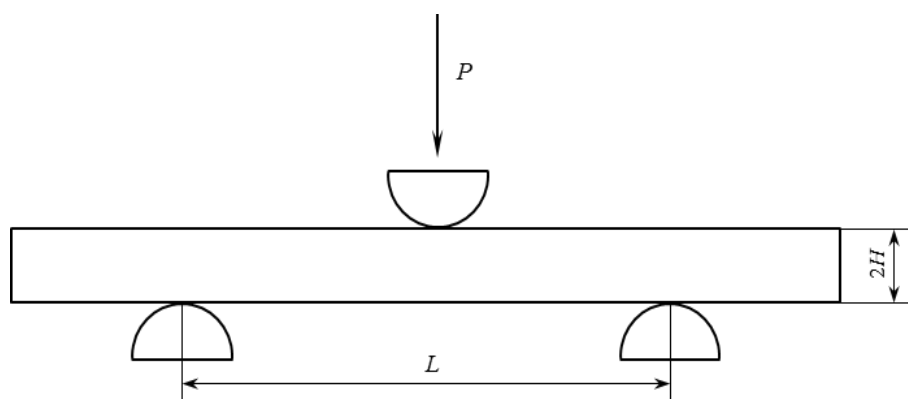


Рис. 2. Схема испытания образца на трехточечный изгиб

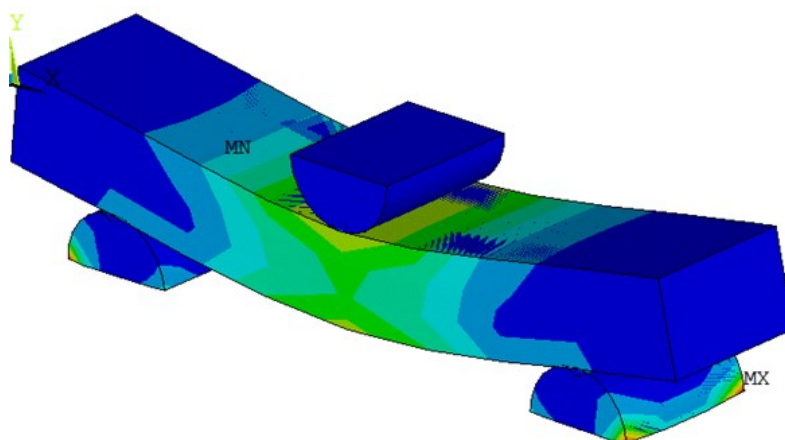


Рис. 3. Деформация образца при трехточечном изгибе

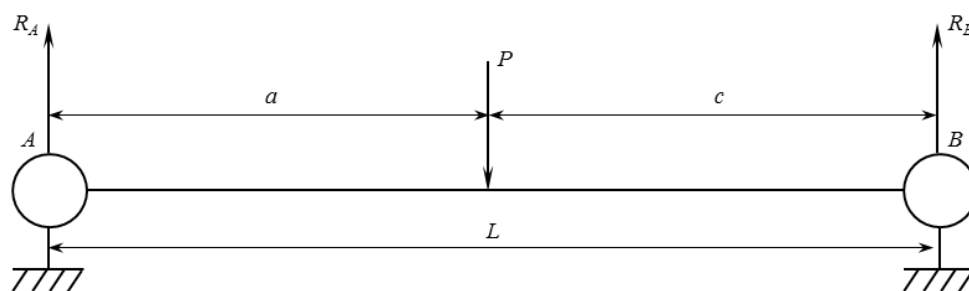


Рис. 4. Схема модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения

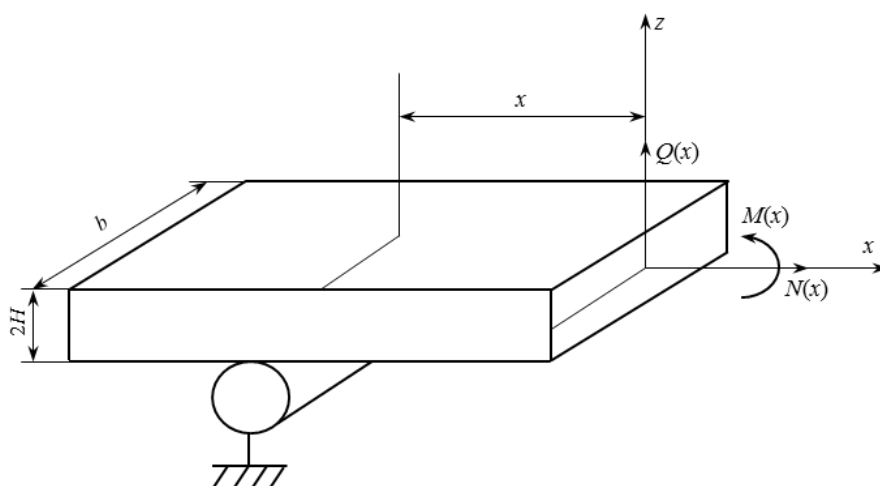


Рис. 5. Силовые факторы: перерезывающая сила $Q(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и геометрические параметры образца при трехточечном изгибе

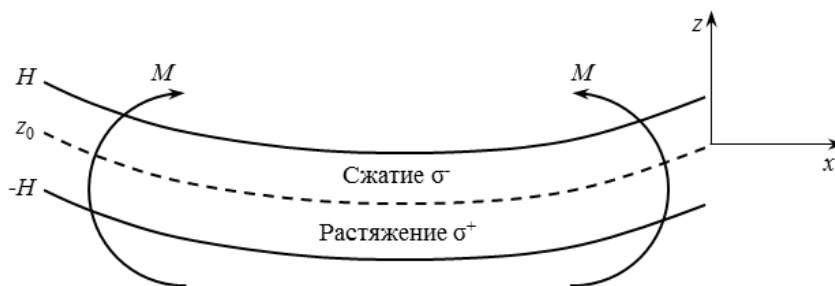


Рис. 6. Граница раздела между деформациями сжатия и растяжения при изгибе образца

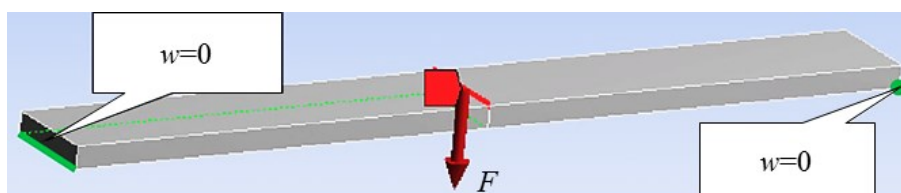


Рис. 7. Модель испытания образца на трехточечный изгиб, реализованная в конечно-элементном программном комплексе

$$\sigma = (\omega_B E_B + \omega_M E_M) \varepsilon, \quad (5)$$

где ω_M , ω_B – объемное содержание матрицы и наполнителя соответственно; E_M , E_B – модуль упругости матрицы и наполнителя соответственно.

Напряжения в элементах композита можно вычислить по формулам:

$$\sigma_B = b_1 \varepsilon; \quad (6)$$

$$\sigma_M^\pm = a_1^\pm \varepsilon_M + a_2^\pm \varepsilon_M^2 + a_3^\pm \varepsilon_M^3 + a_4^\pm \varepsilon_M^4. \quad (7)$$

Аппроксимация выполнена методом наименьших квадратов с использованием полиномов четвертой степени. Этот метод позволяет найти параметры искомой функциональной зависимости, обеспечивающие минимальное среднеквадратическое отклонение аппроксимирующей функции от набора данных, полученных в результате натурных испытаний.

Для сравнения разработанной математической модели с известными моделями построены диаграммы деформирования конструкционного углепластика ВКУ-25 при трехточечном изгибе с применением конечно-элементного программного комплекса. Метод конечных элементов (МКЭ) является своеобразным стандартом при трехмерном моделировании и инженерных расчетах конструкций и их элементов [14–18]. Современное программное обеспечение, используемое для конечно-элементных расчетов, позволяет создать собственный ортотропный материал, для чего применяются соотношения известной модели композиционного материала В.В. Болотина [20]:

$$\sigma = \frac{E_B E_M}{\omega_M E_B + \omega_B E_M} \varepsilon, \quad (8)$$

где ε – деформация образца; ω_M , ω_B – объемное содержание матрицы и наполнителя соответственно; E_M , E_B – модуль упругости матрицы и наполнителя соответственно.

Для учета возможного разброса значений объемного содержания наполнителя проведем расчеты для образцов из конструкционного углепластика ВКУ-25 с объемным содержанием наполнителя 0,65 и 0,55%.

Из паспортных данных получены значения модуля упругости $E=240$ ГПа, предел прочности при растяжении $\sigma_B=4,3$ ГПа и деформация $\varepsilon=0,018\%$, коэффициент Пуассона $\mu_B=0,25$ углеродного волокна Tenax® HTS40 E23 12K [20].

Задавая характеристики волокна и матрицы ($E_M=3,2$ ГПа, $\mu_M=0,33$), а также структуры пакета слоев, включая порядок и углы укладки углеволокна, получим осредненные (эффективные) характеристики углепластика ВКУ-25 при объемном содержании наполнителя 0,55%:

$$E_1=E_2=48,9 \text{ ГПа}; E_3=8,49 \text{ ГПа}; \mu_{12}=0,33;$$

$$\mu_{23}=\mu_{13}=0,29; G_{12}=18,5; G_{23}=G_{13}=2,65 \text{ ГПа}.$$

При объемном содержании наполнителя 0,65%:

$$E_1=E_2=58 \text{ ГПа}; E_3=9,96 \text{ ГПа}; \mu_{12}=0,32;$$

$$\mu_{23}=\mu_{13}=0,25; G_{12}=21,9; G_{23}=G_{13}=3,39 \text{ ГПа}.$$

Эти значения использованы в качестве характеристик ортотропного материала в конечно-элементном программном комплексе.

Послойная схема укладки волокон наполнителя в углепластике: [-45; 90; 45; 0; 0; 45; 90; -45]·4 (четыре пакета слоев) – всего 32 слоя. Длина пролета и геометрические размеры образцов равны: $L=175$ мм, $2H=4,48$ мм, $b=18,04$ мм.

Испытание прямоугольного образца на трехточечный изгиб смоделировано следующим образом. Рассматривается трехмерная пластина с геометрическими параметрами, соответствующими испытываемому образцу, – при длине, равной длине пролета между опорами. В середине образца сверху действует сила F (рис. 7). Свободное опирание образца на опорах в испытательной машине смоделировано в виде ограничений на перемещения: $w=0$ на нижних коротких краях-ребрах (рис. 7, зеленые отрезки).

Результаты

С помощью микроструктурного анализа по фотографиям шлифов торцевой поверхности определено объемное содержание фазовых компонентов образцов из углепластика ВКУ-25 (рис. 8); на сканирующем электронном микроскопе JSM-35CF получен снимок (рис. 9) разрушенного при растяжении в направлении 0 град однонаправленного образца углепластика ВКУ-25.

В результате определены следующие значения содержания объемной доли наполнителя, матрицы и межфазной зоны:

$$\omega_B=0,65; \omega_M=0,32; \omega_I=0,03,$$

где ω_B , ω_I , ω_M – соответственно объемное содержание волокон, межфазной зоны и полимерной матрицы в углепластике.

Затем определены характеристики межфазной зоны, что является важной задачей по исследованию механического поведения ПКМ. Реакция в сечении образца R складывается из реакций волокна, межфазной зоны и полимерной матрицы (рис. 10). Строение поперечного сечения образца из ПКМ схематически представлено на рис. 11.

Реакцию в сечении R можно представить в виде:

$$R=R_B+R_I+R_M, \quad (9)$$

где R_B , R_I , R_M – соответственно суммарная реакция волокон, межфазной зоны и полимерной матрицы в поперечном сечении.

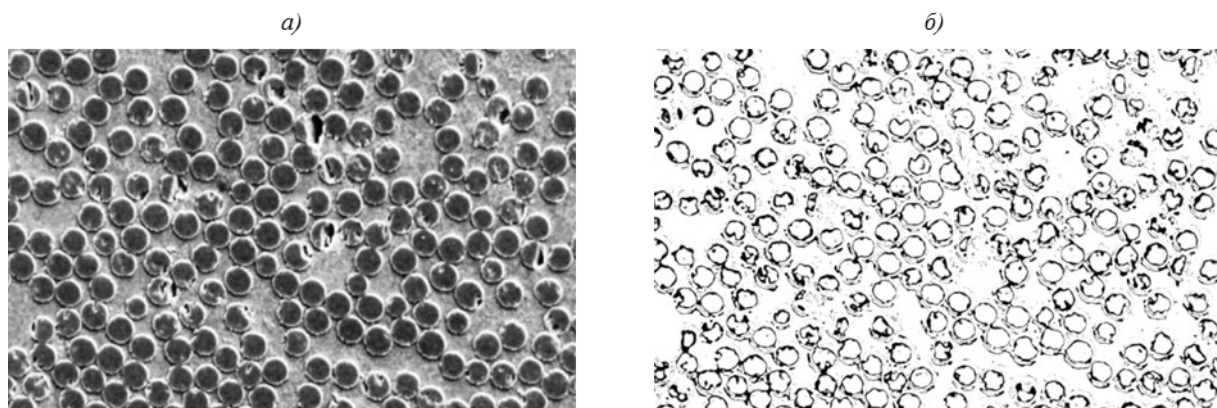


Рис. 8. Исходная (а) и обработанная (б) фотографии шлифа торцевой поверхности углепластика

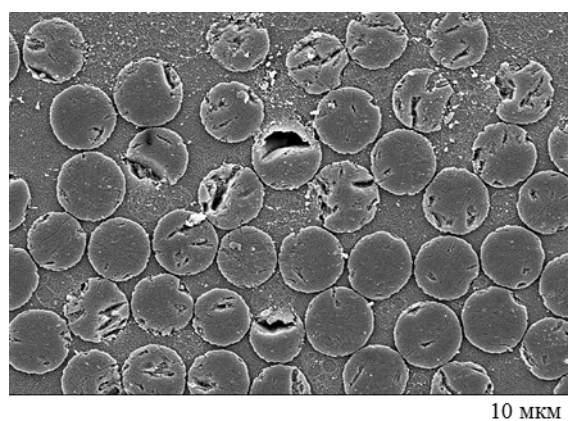


Рис. 9. Шлиф углепластика ВКУ-25 с однонаправленной укладкой для определения долей объемного содержания матрицы с межфазной зоной и наполнителя

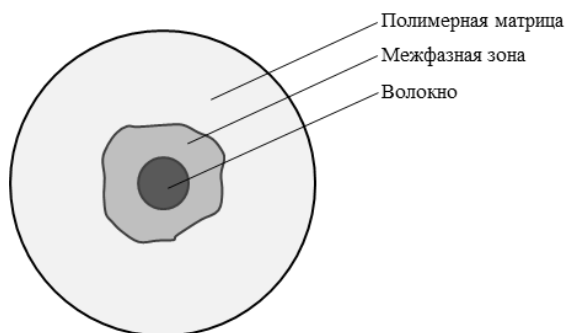


Рис. 10. Схема межфазной зоны в полимерном композиционном материале (ПКМ)

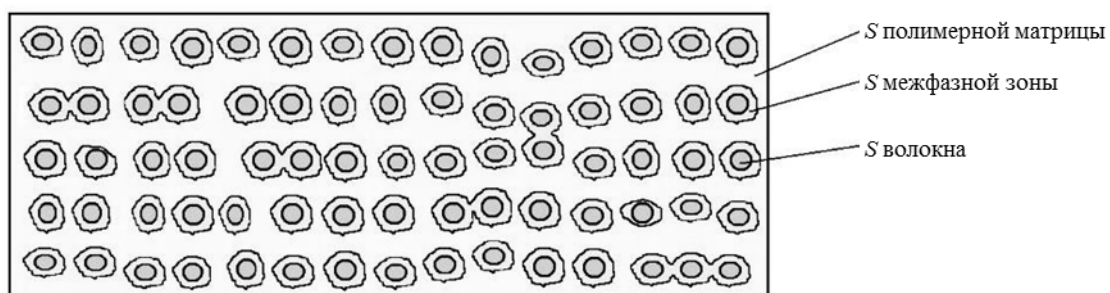


Рис. 11. Строение поперечного сечения (S – площадь) образца из полимерного композиционного материала (ПКМ)

Далее предполагаем, что материалы полимерной матрицы и наполнителя однородны в рассматриваемом сечении, а для материала межфазной зоны (на данном этапе) характеристики рассматриваются как усредненные. Тогда, поделив обе части уравнения (10) на площадь поперечного сечения образца и выделив в этой площади части, занимаемые волокном и межфазной зоной, получим:

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{S}(R_b + R_1 + R_m); \quad (10)$$

$$\sigma = \sigma_b \frac{S_b}{S} + \sigma_1 \frac{S_1}{S} + \sigma_m \frac{S_m}{S}, \quad (11)$$

где S – площадь поперечного сечения образца; $\sigma_b, \sigma_1, \sigma_m$ – напряжение, действующее соответственно на волокно, межфазную зону и полимерную матрицу в поперечном сечении; S_b, S_1, S_m – суммарная площадь соответственно поперечного сечения волокна, межфазной зоны и полимерной матрицы в поперечном сечении образца.

На упругом участке деформирования уравнение (11) будет иметь вид:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E_b \cdot \varepsilon \cdot \frac{S_b}{S} + E_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{S_1}{S} + E_m \cdot \varepsilon \cdot \frac{S_m}{S} \quad (12)$$

или

$$E = \omega_b \cdot E_b + \omega_1 \cdot E_1 + \omega_m \cdot E_m, \quad (13)$$

где E, E_b, E_1, E_m – модуль упругости соответственно углепластика, волокна, межфазной зоны и полимерной матрицы; $\omega_b, \omega_1, \omega_m$ – доля соответственно волокна, межфазной зоны и матрицы в поперечном сечении образца углепластика.

Формула (14) позволяет, зная модули упругости углепластика, полимерной матрицы, волокна и доли площадей полимерной матрицы, волокна и межфазной зоны от площади поперечного сечения образца углепластика, определить модуль упругости межфазной зоны:

$$E_1 = \frac{E - \omega_b \cdot E_b - \omega_m \cdot E_m}{\omega_1}. \quad (14)$$

Запишем соотношения между осредненными напряжениями и деформациями, полученными в рамках гипотезы о совместном деформировании полимерной матрицы и наполнителя при описании матрицы полиномом четвертой степени:

$$\begin{aligned} \sigma^+(x, z) = & (1 - \omega_b)(a_1^+ + a_2^+ \varepsilon^2 + a_3^+ \varepsilon^3 + a_4^+ \varepsilon^4) + \\ & + \omega_b(b_1^+ \varepsilon + b_2^+ \varepsilon^2) = [a_1^+(1 - \omega_b) + b_1^+ \omega_b] \varepsilon + \\ & + [a_2^+(1 - \omega_b) + b_2^+ \omega_b] \varepsilon^2 + a_3^+(1 - \omega_b) \varepsilon^3 + \\ & + a_4^+(1 - \omega_b) \varepsilon^4 = B_1^+ \varepsilon + B_2^+ \varepsilon^2 + B_3^+ \varepsilon^3 + B_4^+ \varepsilon^4; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma^-(x, z) = & (1 - \omega_b)(a_1^- + a_2^- \varepsilon^2 + a_3^- \varepsilon^3 + a_4^- \varepsilon^4) + \\ & + \omega_b(b_1^- \varepsilon + b_2^- \varepsilon^2) = [a_1^-(1 - \omega_b) + b_1^- \omega_b] \varepsilon + \\ & + [a_2^-(1 - \omega_b) + b_2^- \omega_b] \varepsilon^2 + a_3^-(1 - \omega_b) \varepsilon^3 + \\ & + a_4^-(1 - \omega_b) \varepsilon^4 = B_1^- \varepsilon + B_2^- \varepsilon^2 + B_3^- \varepsilon^3 + B_4^- \varepsilon^4, \end{aligned} \quad (16)$$

где a_0, \dots, a_K – коэффициенты аппроксимации диаграммы растяжения или сжатия полимерной матрицы полиномиальной функцией степени K ; b_0, \dots, b_K – коэффициенты аппроксимации диаграммы растяжения или сжатия материала наполнителя полиномиальной функцией степени K .

На границе этих состояний деформации (ε) равны нулю, поэтому сама граница определяется соотношениями:

$$z_0 = -\frac{e}{k}; \quad -H < z_0 < H. \quad (17)$$

Продольное усилие N и изгибающий момент M в сечении стержня определяются равенствами:

$$N = b \left[\int_{-H}^{z_0} \sigma^+ dz + \int_{z_0}^H \sigma^- dz \right]; \quad (18)$$

$$M = b \left[\int_{-H}^{z_0} \sigma^+ z dz + \int_{z_0}^H \sigma^- z dz \right]. \quad (19)$$

Подставим в уравнение (15) выражения (5), (6) и полученные выражения для моментов и усилий подставляем в уравнения (2), дополняем результат соотношениями (4), (7) и замыкаем систему граничными условиями. В итоге получаем нелинейную задачу для определения $u(x), w(x), z_0(x), e(x), k(x)$:

$$\begin{aligned} & b \left(\frac{1}{5} B_4^+ k^4 (z_0^5 + H^5) + \frac{1}{4} (B_3^+ k^3 + 4B_4^+ e k^3) (z_0^4 - H^4) + \right. \\ & + \frac{1}{3} (B_2^+ k^2 + 3B_3^+ e k^2 + 6B_4^+ e^2 k^2) (z_0^3 + H^3) + \\ & + \frac{1}{2} (2B_2^+ e k + 3B_3^+ e^2 k + B_1^+ k + 4B_4^+ e^3 k) (z_0^2 - H^2) + \\ & + B_1^+ e (z_0 + H) + B_3^+ e^3 (z_0 + H) + B_2^+ e^2 (z_0 + H) + \\ & + B_4^+ e^4 (z_0 + H) + \frac{1}{5} B_4^+ k^4 (H^5 - z_0^5) + \\ & + \frac{1}{4} (B_3^+ k^3 + 4B_4^+ e k^3) (H^4 - z_0^4) + \\ & + \frac{1}{3} (B_2^+ k^2 + 3B_3^+ e k^2 + 6B_4^+ e^2 k^2) (H^3 - z_0^3) + \\ & + \frac{1}{2} (2B_2^+ e k + 3B_3^+ e^2 k + B_1^+ k + 4B_4^+ e^3 k) (H^2 - z_0^2) + B_1^+ e (H - z_0) + \\ & + B_3^+ e^3 (H - z_0) + B_2^+ e^2 (H - z_0) + B_4^+ e^4 (H - z_0) = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & b\left(\frac{1}{6}B_4^+k^4(z_0^6+H^6)+\frac{1}{5}(B_3^+k^3+4B_4^+ek^3)(z_0^5+H^5)+\right. \\
 & +\frac{1}{4}(B_2^+k^2+3B_3^+ek^2+6B_4^+e^2k^2)(z_0^4-H^4)+ \\
 & +\frac{1}{3}(2B_2^+ek+3B_3^+e^2k+B_1^+k+4B_4^+e^3k)(z_0^3+H^3)+ \\
 & +\frac{1}{2}(B_1^+e+B_3^+e^3+B_2^+e^2+B_4^+e^4)(z_0^2-H^2)+ \\
 & +\frac{1}{6}B_4^+k^4(H^6-z_0^6)+\frac{1}{5}(B_3^+k^3+4B_4^+ek^3)(H^5-z_0^5)+ \\
 & +\frac{1}{4}(B_2^+k^2+3B_3^+ek^2+6B_4^+e^2k^2)(H^4-z_0^4)+ \\
 & +\frac{1}{3}(2B_2^+ek+3B_3^+e^2k+B_1^+k+4B_4^+e^3k)(H^3-z_0^3)+ \\
 & +\frac{1}{2}(B_1^+e+B_3^+e^3+B_2^+e^2+B_4^+e^4)(H^2-z_0^2)= \\
 & = \begin{cases} \frac{P \cdot c}{L}x & \text{при } 0 \leq x \leq a; \\ -\frac{P \cdot a}{L}(x-L) & \text{при } a < x \leq L, \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

где u – продольные перемещения точки образца; w – нормальные перемещения точки образца (прогиб); z – координата, отсчитываемая в направлении толщины образца (по нормали); $e(x)$ – удлинение балки; $k(x)$ – изменение кривизны балки; B_i^\pm – коэффициенты аппроксимации диаграммы растяжения (+) или сжатия (-) материала полимерных матриц, углеродных наполнителей и конструкционных углепластиков на их основе полиномиальной функцией степени i ; P – сила, приложенная к образцу и/или измеренная при его деформировании в процессе испытания; H – половина толщины образца; L – длина рабочей части образца (пролета при изгибе); b – ширина образца; x – координата, отсчитываемая от левой опоры (a).

Система аналитических уравнений (20) и (21) описывает деформирование балок прямоугольного сечения из материалов, имеющих диаграммы, различные для растяжения и сжатия. Система справедлива для образцов полимерных матриц и конструкционных углепластиков.

В рамках сформулированных выше предположений считаем, что волокна деформируются по линейному закону вида $\sigma=b_1\varepsilon$, а $b_i^\pm=0$.

При изгибе углепластика наибольший вклад в жесткость композита вносит наполнитель. Поэтому можно пренебречь несущей способностью матрицы и считать, что физические соотношения для материала образца можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(B_1^+k)(z_0^2-H^2)+B_1^+e(z_0+H)+ \\
 & +\frac{1}{2}(B_1^-k)(H^2-z_0^2)+B_1^-e(H-z_0)=0;
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 & b\left(\frac{1}{3}(B_1^+k)(z_0^3+H^3)+\frac{1}{2}(B_1^+e)(z_0^2-H^2)+\right. \\
 & +\frac{1}{3}(B_1^-k)(H^3-z_0^3)+\frac{1}{2}(B_1^-e)(H^2-z_0^2))= \\
 & = \begin{cases} \frac{P \cdot c}{L}x & \text{при } 0 \leq x \leq a; \\ -\frac{P \cdot a}{L}(x-L) & \text{при } a < x \leq L. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Решая задачу для конкретных значений B_i^\pm , P , b , H , L и a , получаем, в частности, значение прогиба в месте приложения нагрузки $w(a)$, что позволяет построить диаграмму $w-P$, аналогичную получаемой при натурных испытаниях на трехточечный изгиб образцов в форме балки.

На рис. 12 линиями 1–5 показаны результаты построения в конечно-элементном программном комплексе диаграмм деформирования образца из ортотропного углепластика ВКУ-25 при объемном содержании арматуры 0,55 и 0,65%. Здесь же приведены диаграммы, полученные ранее с использованием разработанных моделей, а также показана экспериментальная диаграмма (линия 4) для образца с объемным содержанием арматуры 0,65%.

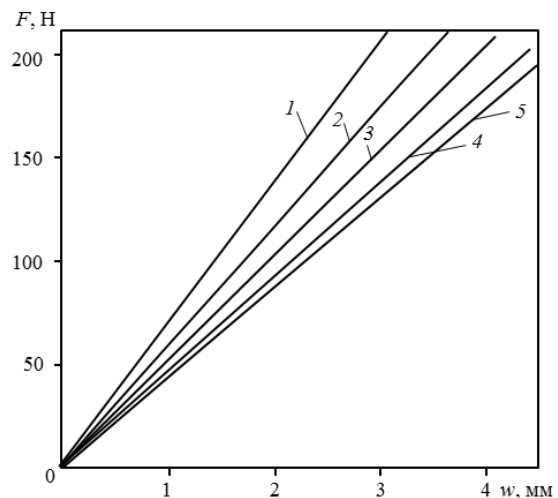


Рис. 12. Сравнение экспериментальных (4) и модельных (3, 5) диаграмм деформирования, а также полученных методом конечных элементов (1, 2), при трехточечном изгибе образца конструкционного углепластика ВКУ-25 с объемным содержанием арматуры 0,65 (1, 3, 4) и 0,55% (2, 5)

Из данных рис. 12 видно, что разработанная модель деформирования конструкционного углепластика при изгибе точнее описывает количественные характеристики углепластика ВКУ-25, чем известная модель В.В. Болотина [19], даже при использовании трехмерных конечно-элементных моделей испытания. Расчетные данные хорошо согласуются с результатами испытаний. Наблюдаемые отклонения могут быть вызва-

ны несовершенством модели, которая нуждается в дальнейшей оптимизации.

Обсуждение и заключения

В результате исследований разработана математическая модель для построения диаграммы деформирования многослойного углепластика при испытании образцов прямоугольной формы на трехточечный изгиб. Модель учитывает разнотелостойкость слоев деформациям растяжения и сжатия, возникающим при изгибе. Применение разработанной модели позволит уменьшить количество испытаний при разработке и последующей сертификации конструкционных углепластиков.

Математические модели деформирования конструкционного углепластика при изгибе могут использоваться для расчета структуры углепластика и при проектировании изделий из ПКМ для перспективной авиационной техники.

Результаты работы являются основой для создания и совершенствования расчетных методов

проектирования и оптимизации элементов конструкций из конструкционных углепластиков. Оптимизация компонентного состава и структуры конструкционных углепластиков позволит качественно улучшить свойства конструкций: снизить их материалоемкость, повысить прочность и жесткость.

Проведенные исследования показали, что вклад матрицы в прочностные характеристики конструкционного углепластика невелик. Таким образом, перспективны разработки более высоко-модульных матриц для увеличения прочности углепластиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках Соглашения о предоставлении субсидии №14.595.21.0002 от 22.08.2014 г., уникальный идентификатор №RFMEFI59514X0002, с использованием оборудования ЦКП «Климатические испытания ФГУП «ВИАМ».

ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // Авиационные материалы и технологии. 2015. №1 (34). С. 3–33.
2. Каблов Е.Н., Антипов В.В., Сенаторова О.Г., Лукина Н.Ф. Новый класс слоистых алюмокомпозитов на основе алюминий-литиевого сплава 1441 с пониженной плотностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2011. №SP2. С. 174–183.
3. Каблов Е.Н., Щетанов Б.В., Ивахненко Ю.А., Балинова Ю.А. Перспективные армирующие высокотемпературные волокна для металлических и керамических композиционных материалов // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2013. №2. Ст. 05. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 12.02.2015).
4. Каблов Е.Н., Старцев О.В., Кротов А.С., Кириллов В.Н. Климатическое старение композиционных материалов авиационного назначения. III. Значимые факторы старения // Деформация и разрушение материалов. 2011. №1. С. 34–40.
5. Ерасов В.С., Крылов В.Д., Панин С.В., Гончаров А.А. Испытания полимерного композиционного материала на удар падающим грузом // Авиационные материалы и технологии. 2013. №3. С. 60–64.
6. Каблов Е.Н. Современные материалы – основа инновационной модернизации России // Металлы Евразии. 2012. №3. С. 10–15.
7. Ефимов В.А., Шведкова А.К., Коренькова Т.Г., Кириллов В.Н. Исследование полимерных конструкционных материалов при воздействии климатических факторов и нагрузок в лабораторных и натуральных условиях // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2013. №1. Ст. 05. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 12.02.2015).
8. Кириллов В.Н., Старцев О.В., Ефимов В.А. Климатическая стойкость и повреждаемость полимерных композиционных материалов, проблемы и пути решения // Авиационные материалы и технологии. 2012. №S. С. 412–423.
9. Ерасов В.С., Гриневич А.В., Сенник В.Я., Коновалов В.В., Трунин Ю.П., Нестеренко Г.И. Расчетные значения характеристик прочности авиационных материалов // Авиационные материалы и технологии. 2012. №2. С. 14–16.
10. Беляев М.С., Горбовец М.А., Комарова Т.И. Способ испытаний и расчетное определение предела выносливости для горизонтального участка кривой усталости // Авиационные материалы и технологии. 2012. №3. С. 50–55.
11. Майорова И.А. Математическое моделирование процесса теплопереноса и оптимизация конструкции многослойного теплозащитного покрытия // Авиационные материалы и технологии. 2013. №2. С. 16–18.
12. Саморуков М.Л. Аналитический подход к математическому моделированию температурной составляющей ротационной сварки трением // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2013. №9. Ст. 03. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 12.02.2015).
13. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.

14. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Выбор схемы расположения высокомодульных слоев в многослойной гибридной пластине для ее наибольшего сопротивления потере устойчивости // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №S4. С. 109–117.
15. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н., Терентьев В.Ф., Слизов А.К. Построение диаграмм деформирования в трехмерном пространстве σ – ϵ – t // *Авиационные материалы и технологии*. 2016 (в печати).
16. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин // *Авиационные материалы и технологии*. 2016 (в печати).
17. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа // *Математическое моделирование и численные методы*. 2015. №2. С. 3–22.
18. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования структуры // *Авиационные материалы и технологии*. 2016 (в печати).
19. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю., Луценко А.Н. Расчет на прочность гибридной панели крыла на базе листов и профилей из высокопрочного алюминий-литиевого сплава и слоистого алюмокомпозита // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №1 (40). С. 53–61.
20. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
21. Toho Tenax Europe GmbH. Delivery programme and characteristics for Tenax® HTS40 E23 12K filament yarn. 2010.