

УДК 539.4.011: 539.4.015

Ю.В. Немировский*, С.Ф. Пятаев**

**ПРЕДЕЛЬНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ
ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТОВ**

На основе структурного подхода устанавливается критерий прочности двоякопериодического однонаправленного композиционного материала в зависимости от температуры. Выполнены законы осреднения микронапряжений по объему периодических элементов и условия непрерывности перемещений на границах раздела между ними.

Ключевые слова: критерий прочности, температура, композиционный материал.

On the basis of structural approach the criterion of durability of the double-periodic unidirectional composite material depending on temperature is established. Laws of averaging of micro-pressure on the volume of periodical elements and conditions of displacements continuity on the boundary between them have been performed.

Key words: criterion of strength, temperature, composite material.

* Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН.

** Институт вычислительного моделирования СО РАН.

Одним из наиболее распространенных классов композиционных материалов (КМ) являются однонаправленные волокнистые КМ, обладающие высокой жесткостью и прочностью в направлении волокон и низкой – в поперечном. Для повышения характеристик в этих направлениях такие линейно-армированные слои склеиваются под различными углами, что позволяет получать слоистые КМ, свойства которых уже достаточно высоки в необходимых для эксплуатации направлениях.

Поскольку КМ являются гетерогенными структурами, их можно изучать на основе моделей механики сплошных сред в случае, если градиент прилагаемых внешних нагрузок на расстояниях порядка масштаба неоднородности δ столь незначителен, что им можно пренебречь. В волокнистых КМ под δ подразумевается диаметр волокон или расстояние между ними, в дисперсно-упрочненных – средний размер зерен. В этих условиях достаточно малый объем V , характерный размер которого сравним с δ , содержащий одно или несколько включений, можно рассматривать как сплошное однородное тело V_0 . Такие объемы называют представительными элементами. Внешние нагрузки на гетерогенную среду вызывают в ней микронапряжения σ_{ij} . При введенных допущениях о характере изменения внешних воздействий можно ввести понятие макронапряжений (средних напряжений) $\langle \sigma_{ij} \rangle$ [1–4]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV. \quad (1)$$

Наиболее ответственные конструкции, изготовленные с применением КМ, эксплуатируются, как правило, в экстремальных условиях [4, 5], при которых прочность и жесткость служат одними из важнейших характеристик, определяющих приемлемость или неприемлемость рассматриваемого

КМ для соответствующего элемента конструкции. При этом для абсолютного большинства изделий и эксплуатационных режимов желательно, чтобы напряженно-деформированное состояние не выходило за рамки упругой области. Поэтому большинство известных исследований в области механики КМ посвящено определению эффективных упругих характеристик (характеристики жесткости) КМ, которые устанавливаются, как правило, из сравнения дополнительных или потенциальных энергий неоднородного представительного элемента и однородного элемента аналогичных размеров с эффективными модулями податливости или жесткости соответственно. В силу интегральности энергий высокая концентрация микронапряжений, сосредоточенная в малой по сравнению со всем представительным элементом области, незначительно влияет на эффективные модули [2, 3]. Прочностные же свойства КМ, соответствующие началу разрушения или развития пластических деформаций, обуславливаются локальными концентратами микронапряжений, и поэтому модели прочности КМ должны достаточно точно описывать концентрации микронапряжений, возникающие в окрестности границы раздела «волокно–матрица».

Во многих случаях КМ подвергается температурному воздействию $\Delta T = T - T_0$. Тепловое расширение фаз КМ является дополнительным источником внутренних напряжений, так как температурные коэффициенты линейного расширения (ТКЛР) у них различны.

Без ограничения общности можно полагать, что для каждой фазы КМ справедливо квадратичное условие прочности:

$$p_{ijkl}^{(n)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + f_{ij}^{(n)} \sigma_{ij} + q^{(n)} \leq 0, \quad n=1, 2; \quad i, j, k, l=1, 2, 3, \quad (2)$$

где $p_{ijkl}^{(n)}, f_{ij}^{(n)}$ – компоненты симметричных тензоров 4-го

и 2-го рангов при квадратичной и линейной частях ($P_{ijk}^{(n)} = P_{jik}^{(n)} = P_{kij}^{(n)} = P_{kji}^{(n)}$, $f_{ij}^{(n)} = f_{ji}^{(n)}$); константы $q^{(n)}$ зависят от прочностных характеристик при растяжении и сжатии; $n=1$ соответствует материалу матрицы (связующего), $n=2$ – волокна (наполнителя).

Детализация компонент тензоров и констант зависит от конкретного условия прочности. При достижении равенства полагают, что напряжения σ_{ij} выходят на предельную поверхность материала («поверхность прочности»), и начинается процесс разрушения.

Таким образом, под критическими микронапряжениями, порождающими начало разрушения, подразумеваются такие σ_{ij} , при которых хотя бы одно из соотношений (2) обращается в равенство. Зная эти напряжения, с помощью выражения (1) можно вычислить критические макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и тем самым построить в пространстве макронапряжений «поверхность прочности».

Другой, противоположный подход к построению «поверхности прочности» КМ, состоит в определении каким-либо образом через выражение (1) микронапряжений σ_{ij} по известным макронапряжениям $\langle \sigma_{ij} \rangle$. Далее, задавая определенный закон изменения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ (например, однопараметрический), необходимо определить критические микронапряжения. Тогда инициирующие их макронапряжения и будут являться критическими.

Целью данной работы является исследование влияния температуры на прочностные свойства линейно-армированных КМ. Предполагается, что составляющие фазы однородны и изотропны, адгезия между ними идеальна, композит подвергается силовым и температурным воздействиям.

В качестве представительного элемента КМ выбирается произвольный неоднородный параллелепипед малого объема V длиной $2l$, основанием которого является параллелограмм (рис. 1). Внутри по центру расположен круговой цилиндр объемом V_p , моделирующий волокно; область $V_m = V/V_p$ заполнена связующим. Такой элемент обеспечивает периодичность структуры КМ по двум направлениям в трансверсальной плоскости.

Пусть в однородном теле V_0 , соответствующем V , реализуется плоское однородное макронапряженное состояние $\langle \sigma_{ij} \rangle \neq 0$, $i, j=1, 2$. Случай, когда действует только напряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$, ниже рассматривается отдельно. Зададим на границах V следующий вид краевых,

$$\begin{aligned} u_i|_{\Gamma} &= u_i^{\Gamma}(x_1, x_2, x_3), \quad i=1, 2, 3; \\ \vec{p}_i &= \vec{p}_i|_{S_i} = (0, 0, (-1)^i \sigma_{33}^S(x_1, x_2)), \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где Γ – боковая поверхность элемента V ; S_1, S_2 – торцы при $x_3=-l$ и $x_3=l$ соответственно; векторы p_1, p_2 противоположны по знаку, так как σ_{33}^S – функция, одна и та же для S_1 и S_2 .

Осуществляется предварительный (до начала деформирования внешними усилиями) нагрев или

охлаждение тела с разностью температур $\Delta T = T - T_0$, зависящей в общем случае от координат x_1 и x_2 , при этом при температуре T_0 в теле отсутствуют напряжения и деформации.

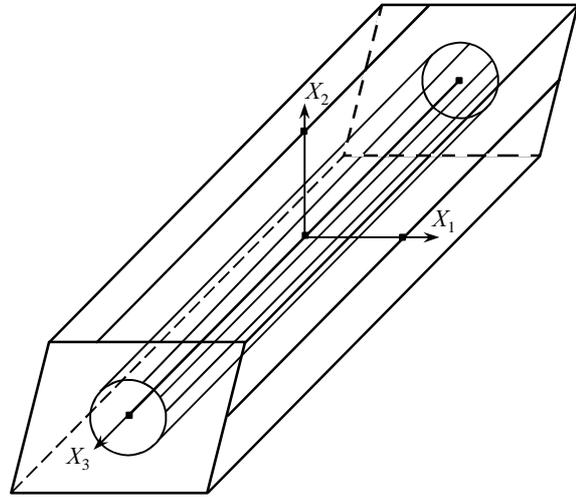


Рис. 1. Представительный элемент малого объема V однонаправленного композиционного материала

Функции, входящие в краевые условия (3), неизвестны, и их нужно подобрать так, чтобы микронапряжения σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), порождаемые этими краевыми условиями и температурой ΔT , не зависели от x_3 и удовлетворяли условиям осреднения микронапряжений (1), которые можно свести к плоским интегралам:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} dS \neq 0, \quad i, j=1, 2; \quad \int_S \sigma_{i3} dS = 0, \quad i=1, 2, 3, \quad (4)$$

где S – произвольное торцевое сечение представительного элемента V .

Покажем, что при соответствующем подборе краевых условий и требовании независимости микронапряженно-деформированного состояния (МНДС) от x_3 смещение u_3 не зависит от x_1, x_2 и линейно относительно x_3 , деформация ϵ_{33} постоянна, микронапряжения σ_{13}, σ_{23} равны нулю.

Перемещения u_1, u_2 должны иметь вид $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, иначе ϵ_{11} и ϵ_{22} будут являться функциями x_3 . Из независимости МНДС от x_3 следует

$$\begin{aligned} \epsilon'_{33,3} = 0 &\Rightarrow u''_{3,33} = 0 \Rightarrow u_3 = v_3(x_1, x_2)x_3; \\ (i=1, 2) \quad \epsilon'_{i3,3} = 0 &\Rightarrow u''_{i,33} + u''_{3i3} = 0 \Rightarrow u''_{3i3} = 0 \Rightarrow v'_{3,i} = 0 \Rightarrow v_3 = \text{const} \end{aligned}$$

где символ «'» обозначает производную по соответствующей переменной; тогда $\epsilon_{33} = v_3$, т. е. $u_3 = \epsilon_{33}x_3$.

Учитывая вид зависимости перемещений от координат, имеем

$$(i=1, 2): \quad 2\epsilon_{i3} = u'_{i,3} + u'_{3,i} = u'_{3,i} = 0 \Rightarrow \sigma_{i3} = 0.$$

Тогда для реализации введенных требований u_i^Γ и σ_{33}^S в (3) должны удовлетворять соотношениям

$$u_i^\Gamma = u_i^\Gamma(x_1, x_2), \quad i=1, 2; \quad u_3^\Gamma = \varepsilon_{33} x_3; \quad \int_S \sigma_{33}^S dS = 0,$$

при этом очевидно, что $\sigma_{33} = \sigma_{33}^S$.

При изменении температуры и действии механических нагрузок связь между напряжениями и деформациями для изотропного упругого тела описывается законом Дюамеля–Неймана:

$$\bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \bar{e},$$

где $\bar{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33})$ – вектор микронапряжений; $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{33})$ – вектор деформаций; α – температурный коэффициент линейного расширения (ТКЛР); $\bar{e} = (1, 1, 0, 1)$ – вектор, отвечающий за изменение микронапряжений $\bar{\sigma}$ от действия разности температур ΔT ; D – тензор жесткости, записанный в соответствии с порядком следования компонент векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\sigma}$.

Компоненты тензора D и коэффициент α являются кусочно-постоянными функциями координат x_1 и x_2 (здесь и далее под такими функциями понимаются функции, постоянные в пределах каждой фазы КМ), при этом упругие характеристики фаз дополнительно зависят и от температуры, т. е. модуль упругости $E = E(T, x_1, x_2)$, коэффициент Пуассона $\nu = \nu(T, x_1, x_2)$, $K = E / (1 - 2\nu)$ – объемный модуль упругости.

При введенных краевых условиях функционал Лагранжа для элемента V в общем виде записывается

$$L = \frac{1}{2V} \int_V (\bar{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \bar{e}) \bar{\varepsilon}^* dV - \int_{S_1} \bar{u} \bar{p}_1^* dS - \int_{S_2} \bar{u} \bar{p}_2^* dS, \quad (5)$$

где $\bar{u} = (u_1, u_2, \varepsilon_{33}, x_3)$ – вектор перемещений; символ «*» обозначает транспонирование вектор-строки.

В функционале (5) интегралы по торцам S_1 и S_2 можно переписать в виде

$$\int_S \varepsilon_{33} \sigma_{33}^S dS.$$

С учетом $\varepsilon_{33} = \text{const}$ и $\langle \sigma_{33}^S \rangle = 0$ этот интеграл равен нулю; таким образом, в выражении для L остается только объемный интеграл, который сводится с точностью до положительного множителя к

$$L = \int_S (\bar{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \bar{e}) \bar{\varepsilon}^* dS.$$

Перепишем L в виде

$$L = \int_S [(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33}] dS - \int_S K \alpha (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \Delta T dS, \quad (6)$$

где λ, G – постоянные Ламе.

Полученный функционал можно упростить, избавившись от квадрата деформации ε_{33} . Из закона Дюамеля–Неймана для σ_{33}

$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{33} - K \alpha \Delta T = (\lambda + 2G)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - K \alpha \Delta T \quad (7)$$

после умножения этого соотношения на ε_{33} с последующим интегрированием по S следует

$$\int_S [(\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33}] dS = \varepsilon_{33} \int_S K \alpha \Delta T dS.$$

Тогда L преобразуется к виду

$$L = \int_S [(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 4G \varepsilon_{12}^2] dS + \varepsilon_{33} \int_S \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS. \quad (8)$$

Для исключения из функционала (8) деформации ε_{33} выразим ее через ε_{11} и ε_{22} . Интегрируя закон (7), получим

$$\varepsilon_{33} \int_S (\lambda + 2G) dS + \int_S \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T dS = 0. \quad (9)$$

Так как жесткостные характеристики являются кусочно-постоянными функциями на S , то

$$\langle \lambda + 2G \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\lambda + 2G) dS = (\lambda_m + 2G_m) c_m + (\lambda_p + 2G_p) c_p,$$

где $c_m, l_m, G_m, c_p, l_p, G_p$ – объемные концентрации и постоянные Ламе матрицы и волокна соответственно.

Тогда из выражения (9) определяется ε_{33} :

$$\varepsilon_{33} = - \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[\int_S \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K \alpha \Delta T dS \right]. \quad (10)$$

Подстановка выражения (10) в уравнение (8) приводит функционал L к виду, в котором присутствуют только $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ и ε_{12} :

$$L = L_q + L_l, \quad (11)$$

где $L_q = L_{q1} - L_{q2}$, L_l – соответственно квадратичная и линейная части функционала L .

$$L_{q1} = \int_S [(\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 4G \varepsilon_{12}^2] dS,$$

$$L_{q2} = \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[\int_S \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS \right]^2,$$

$$L_l = \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \int_S K \alpha \Delta T dS \int_S \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS -$$

$$- \int_S K \alpha \Delta T (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS.$$

В работе [6] доказано, что квадратичная часть L_q функционала L в пространстве обобщенных функций $w_2^{(1)}$ положительно определена, откуда

следует существование и единственность элемента $\bar{u}_0 \in W_2^{(1)}$, доставляющего минимум функционала L_{q_2} .

При решении задачи минимизации функционала (11) методом конечных элементов (МКЭ) функционал L_{q_2} порождает полностью заполненную глобальную матрицу жесткости, размеры которой зависят от числа узлов дискретизации и могут достигать десятков и даже сотен тысяч. Решение алгебраической системы, соответствующей такой матрице, весьма затруднительно. Во избежание этого преобразуем L_{q_2} . Поскольку

$$\int_S \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) dS = \lambda_m \int_{S_m} \text{div } \bar{u} dS + \lambda_p \int_{S_p} \text{div } \bar{u} dS,$$

где S_m, S_p – области, занимаемые материалами матрицы и волокна соответственно, $\bar{u} = (u_1, u_2)$ – вектор перемещений,

то по формуле Гаусса–Остроградского эти два интеграла переписываются в виде

$$\int_{S_p} \text{div } \bar{u} dS = \int_{\partial S_p} \bar{u} \bar{n}_p^* d\gamma, \quad \int_{S_m} \text{div } \bar{u} dS = \int_{\partial S_m} \bar{u} \bar{n}_m^* d\gamma - \int_{\partial S_p} \bar{u} \bar{n}_p^* d\gamma,$$

где \bar{n}_m – внешняя нормаль к внешней границе ∂S_m области S_m ; \bar{n}_p – внешняя нормаль к границе ∂S_p области S_p .

$$\text{Обозначим } J_m = \int_{\partial S_m} \bar{u} \bar{n}_m^* d\gamma, \quad J_p = \int_{\partial S_p} \bar{u} \bar{n}_p^* d\gamma,$$

тогда функционалы L_{q_2} и L_l принимают следующий вид:

$$L_{q_2} = \frac{1}{S < \lambda + 2G >} [(\lambda_p - \lambda_m) J_p + \lambda_m J_m]^2,$$

$$L_l = \frac{1}{S < \lambda + 2G >} [(\lambda_p - \lambda_m) J_p + \lambda_m J_m] \int_S K \alpha \Delta T dS - \int_S K \alpha \Delta T (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) dS. \quad (12)$$

В случае постоянства температуры в пределах каждой фазы одного представительного элемента V линейный функционал L_l можно упростить

$$L_l = q_p J_p + q_m J_m, \quad (13)$$

где

$$q_p = q(1_p - 1_m) + K_m \alpha_m \Delta T_m - K_p \alpha_p \Delta T_p,$$

$$q_m = q1_m - K_m \alpha_m \Delta T_m,$$

$$q = \frac{K_m \alpha_m \Delta T_m c_m + K_p \alpha_p \Delta T_p c_p}{< \lambda + 2G >},$$

величины $\alpha_m, \alpha_p, \Delta T_m, \Delta T_p$ – температурные коэффициенты линейного расширения (ТКЛР) и приращение температуры для матрицы и волокна соответственно, при этом можно принять во внимание условие постоянства ΔT на всем представительном элементе V , предложенное в [3].

Таким образом, для поиска микронапряжений в области S будем использовать функционал L с представлением L_{q_2} в виде (12) и L_l в виде (12) или (13) и условия осреднения микронапряжений (4).

При использовании МКЭ вариация функционала L_{q_2} приводит к глобальной матрице жесткости, которая уже не является полностью заполненной. Каждый узел $\bar{x} \in \partial S_p$ порождает 2 уравнения с $2(n_p + n_m)$ ненулевыми коэффициентами, где n_p и n_m – количество узлов на ∂S_p и ∂S_m соответственно. Однако часть слагаемых этих уравнений содержит известные узловые перемещения, поскольку в узлах, расположенных на ∂S_m , они заданы. Поэтому путем переноса известных величин в правую часть количество ненулевых коэффициентов каждого уравнения уменьшается до $2n_p$. Таким образом, только блок глобальной матрицы жесткости, соответствующий L_{q_2} , полностью заполнен и имеет размеры $2n_p \times 2n_p$.

Для получения алгебраической системы уравнений для определения неизвестных узловых перемещений осуществим вариацию функционала L

$$\delta L = \delta \bar{U} A \bar{U}^* - \delta \bar{U}_p \beta_p \bar{a}_p \otimes \bar{a}_p \bar{U}_p^* + \delta \bar{U}_p [0,5 q_p \bar{a}_p^* - \beta_m \bar{a}_p \otimes \bar{a}_m \bar{U}_m^*] = 0, \quad (14)$$

где

$$\beta_p = \frac{(\lambda_p - \lambda_m)^2}{2S < \lambda + 2G >}, \quad \beta_m = \frac{\lambda_m (\lambda_p - \lambda_m)}{2S < \lambda + 2G >};$$

A – глобальная матрица жесткости, следующая из вариации функционала L_{q_1} ; \bar{U} – глобальный вектор узловых перемещений; символ \otimes обозначает диадное произведение векторов; \bar{U}_p, \bar{U}_m – вектора узловых перемещений соответственно на ∂S_p и ∂S_m с компонентами

$$(\bar{U}_p)_{2i-1} = u_1(\bar{x}_{k_i}), \quad (\bar{U}_p)_{2i} = u_2(\bar{x}_{k_i}),$$

k_i – номера узлов на $\partial S_p, i = 1, \dots, n_p$,

$$(\bar{U}_m)_{2j-1} = u_1(\bar{x}_{l_j}), \quad (\bar{U}_m)_{2j} = u_2(\bar{x}_{l_j}),$$

l_j – номера узлов на $\partial S_m, j = 1, \dots, n_m$,

координаты векторов \bar{a}_p и \bar{a}_m вычисляются через координаты узлов на ∂S_p и ∂S_m по однотипным формулам (пусть n – число узлов на соответствующей границе $g; k_i$ – номера узлов на $g; (x_{k_i}, y_{k_i})$ – координаты этих узлов, $i = 1, \dots, n$):

$$(\bar{a}_p)_1 = y_{k_2} - y_{k_n}, \quad (\bar{a}_p)_2 = x_{k_n} - x_{k_2},$$

$$(\bar{a}_p)_{2n-1} = y_{k_1} - y_{k_{n-1}}, \quad (\bar{a}_p)_{2n} = x_{k_{n-1}} - x_{k_1};$$

$$(\bar{a}_p)_{2i-1} = y_{k_{i+1}} - y_{k_{i-1}}, \quad (\bar{a}_p)_{2i} = x_{k_{i-1}} - x_{k_{i+1}}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Принимая во внимание различную размерность матриц A и $\bar{a}_p \otimes \bar{a}_p$ и векторов $\bar{U}, \bar{U}_p, \bar{U}_m$, из вариационного уравнения (14) следует алгебраическая система, которую можно записать в виде

$$G \bar{U}^* = \bar{F}^*,$$

где компоненты глобальной матрицы жесткости $G = (g_{ij})$ и глобального вектора правой части $\bar{F} = (F_i)$ вычисляются по формулам: если осуществляется вариация в узле $\bar{x}_{k_n} \in \partial S_p (n=1, \dots, n_p)$,

а $\bar{x}_k, \bar{x}_{k_m} \in \partial S_p$ – инцидентные ему узлы, то, обозначая $(a_p)_i = a_i, A = (a_{ij})$, имеем:

– для $i = n, l, m$

$$g_{2k_n-1, 2k_i-1} = a_{2k_n-1, 2k_i-1} - \beta_p a_{2n-1} a_{2i-1},$$

$$g_{2k_n-1, 2k_i} = a_{2k_n-1, 2k_i} - \beta_p a_{2n-1} a_{2i},$$

$$g_{2k_n, 2k_i-1} = a_{2k_n, 2k_i-1} - \beta_p a_{2n} a_{2i-1},$$

$$g_{2k_n, 2k_i} = a_{2k_n, 2k_i} - \beta_p a_{2n} a_{2i};$$

– для $i = 1, 2, \dots, n_p, i \neq n, l, m$

$$g_{2k_n-1, 2k_i-1} = -\beta_p a_{2n-1} a_{2i-1},$$

$$g_{2k_n-1, 2k_i} = -\beta_p a_{2n-1} a_{2i},$$

$$g_{2k_n, 2k_i-1} = -\beta_p a_{2n} a_{2i-1},$$

$$g_{2k_n, 2k_i} = -\beta_p a_{2n} a_{2i};$$

– для $i = 1, 2, \dots, n_p$

$$F_{2k_i-1} = f_p a_{2i-1}, F_{2k_i} = f_p a_{2i}, f_p = -0,5q_p + \beta_m \bar{a}_m \bar{U}_m^*.$$

Остальные компоненты матрицы G совпадают с компонентами матрицы A . Учет известных узловых перемещений на ∂S_m осуществляется стандартными способами.

Зададим на границе ∂S_m краевые и температурные условия в виде

$$u_1|_{\partial S_m} = c_1 x_1 + c_3 x_2, u_2|_{\partial S_m} = c_2 x_2, \Delta T^1 = 0, \quad (15)$$

где c_1, c_2, c_3 – пока произвольные постоянные.

Линейность перемещений на ∂S_m обосновывается тем, что в достаточно широком классе симметрий КМ (орторомбическая, тетрагональная, гексагональная и изотропная системы) [2, 3] при действии однородных макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ($i, j = 1, 2$) перемещения в трансверсальной плоскости с точностью до трансляции и вращения тела как жесткого целого будут $u_1 = \langle \epsilon_{11} \rangle x_1 + 2 \langle \epsilon_{12} \rangle x_2, u_2 = \langle \epsilon_{22} \rangle x_2$.

Для того чтобы подобрать константы c_i в выражениях (15) так, что решение упругой задачи удовлетворяло условиям осреднения (4), разобьем эту задачу на четыре задачи со следующими краевыми и температурными условиями:

$$\text{задача 1: } u_1|_{\partial S_m} = x_1, u_2|_{\partial S_m} = 0, \Delta T = 0,$$

$$\text{задача 2: } u_1|_{\partial S_m} = 0, u_2|_{\partial S_m} = x_2, \Delta T = 0, \quad (16)$$

$$\text{задача 3: } u_1|_{\partial S_m} = x_2, u_2|_{\partial S_m} = 0, \Delta T = 0,$$

$$\text{задача 4: } u_1|_{\partial S_m} = 0, u_2|_{\partial S_m} = 0, \Delta T^1 = 0.$$

Обозначим через $\sigma_{ij}^{(k)}$ микронапряжения k -той упругой задачи ($k=1, 2, 3, 4$) и воспользуемся тем, что линейная комбинация решений

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ij}^{(4)}, i, j=1, 2; \sigma_{33} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{33}^{(4)} \quad (17)$$

будет решением задачи (15). Интегрируя эти соотношения по области S и используя условия (4), получим систему трех алгебраических уравнений для определения констант c_k

$$\sum_{k=1}^3 c_k \langle \sigma_{ij}^{(k)} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{(4)} \rangle, i, j=1, 2. \quad (18)$$

Отметим, что условие осреднения для s_{33} выполнено, так как функционал L был построен так, что $\langle \sigma_{33}^{(k)} \rangle = 0$ ($k=1, \dots, 4$). После решения этой системы комбинация решений (17) может быть представлена в виде

$$\bar{\sigma} = (\langle \bar{\sigma} \rangle - \langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle) \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 + \bar{\sigma}^{(4)}, \quad (19)$$

где

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}), \quad \langle \bar{\sigma} \rangle = (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle),$$

$$\bar{\sigma}^{(4)} = (\sigma_{11}^{(4)}, \sigma_{22}^{(4)}, 0, \sigma_{33}^{(4)}), \quad \langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle = (\langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0),$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(3)} \rangle \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{33}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} & \sigma_{22}^{(3)} & \sigma_{12}^{(3)} & \sigma_{33}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Полученная зависимость (19) выражает вектор микронапряжений $\bar{\sigma}$ через макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и вычисленные из 4-х упругих задач микронапряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$.

Для введения в соотношение (19) осевого макронапряжения необходимо решить упругую задачу, когда в КМ действует только напряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$ при $\Delta T = 0$. В работе [7] показано, что при этих условиях все микронапряжения и деформации много меньше постоянного в пределах каждой фазы напряжения σ_{33} и постоянной деформации ϵ_{33} . Кроме того, напряжение s_{33} связано с напряжением $\langle \sigma_{33} \rangle$ правилом смеси и с большой степенью точности выполняется соотношение $\sigma_{33}(\bar{x}) = E(\bar{x}) \epsilon_{33}$, после интегрирования которого по области S и применения правила смеси получим

$$\sigma_{33}(\bar{x}) = \frac{E(\bar{x})}{\langle E \rangle} \langle \sigma_{33} \rangle, \quad \text{где } \langle E \rangle = c_m E_m + c_p E_p. \quad (20)$$

После сложения решения (20) с решением (19) определяется связь микронапряжений $\bar{\sigma}$ с макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ($i, j=1, 2$), $\langle \sigma_{33} \rangle$, которую можно записать в матричном виде

$$\bar{\sigma} = (\langle \bar{\sigma} \rangle - \langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle) M + \bar{\sigma}^{(4)}, \quad (21)$$

если к векторам $\langle \bar{\sigma} \rangle$ и $\langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle$ добавить четвертую компоненту, а к матрице $\Sigma_1^{-1} \Sigma_2$, имеющей размеры 3×4 , – четвертую строку:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma} \rangle &= (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle), \\ \langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle &= (\langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0, 0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & & E(\bar{x}) \langle E \rangle \end{bmatrix}.$$

Для построения в пространстве напряжений $\langle \sigma_{ii} \rangle$ ($i=1, 2, 3$) поверхности прочности зададим однопараметрический закон нагружения $\langle \sigma \rangle = tk$, где t – параметр нагружения, k – направление нагружения, например, в сферической системе координат, связанной с исходной (исключая сдвиговое напряжение $\langle \sigma_{12} \rangle$), $\bar{k} = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, 0, \sin \psi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Тогда соотношение (21) переписывается через параметр нагружения t
 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 t + \bar{\sigma}_0$, где $\bar{\sigma}_1 = \bar{k} M$, $\bar{\sigma}_0 = -\langle \bar{\sigma}^{(4)} \rangle M + \bar{\sigma}^{(4)}$. (23)

Преобразуем условие прочности (2), записывая тензор $p_{ijkl}^{(n)}$ в виде матрицы P , а тензор $f_{ij}^{(n)}$ – в виде вектора \bar{f} , полагая при этом, что P и \bar{f} зависят от $\bar{x} \in S$. Аналогично константы $q^{(n)}$ можно записать как кусочно-постоянную функцию q . Таким образом, условие (2) приводится к виду:

$$(\bar{\sigma} P, \bar{\sigma}) + (\bar{\sigma}, \bar{f}) + q \leq 0, \quad P \geq 0, \quad q < 0, \quad (24)$$

где символ « \cdot » обозначает скалярное произведение векторов.

Обозначим через D дискретное покрытие области S , через e – конечные элементы. Дискретизация должна удовлетворять условию, что каждый конечный элемент расположен или в S_p , или в S_m , и микронапряжения на нем постоянны. В этом случае P и \bar{f} можно рассматривать как функции от конечных элементов, т. е. область их определения становится D . Тогда, подставляя в условие (24) закон нагружения (23), разрушение конечного элемента e из D будет определяться корнями t_1, t_2 (если они существуют) квадратного уравнения

$$(\bar{\sigma}_1 P, \bar{\sigma}_1) t^2 + (2\bar{\sigma}_0 P + \bar{f}, \bar{\sigma}_1) t + (\bar{\sigma}_0 P + \bar{f}, \bar{\sigma}_0) + q = 0. \quad (25)$$

После вычисления для каждого конечного элемента значений t_1, t_2 , при которых он выходит на стадию разрушения, из них выбирается максимальное t_1^* и минимальное t_2^* :

$$t_1^* = \max_{e \in D} t_1, \quad t_2^* = \min_{e \in D} t_2,$$

которые и будут являться критическими для всего композиционного материала в направлении k , при этом критические макронапряжения определяются как $\langle \sigma \rangle_i = t_i^* k, i=1, 2$. Нагружение в направлении $-k$ рассматривать не нужно, так как в этом случае получим противоположные по знаку критические значения параметра нагружения и, соответственно, те же самые критические значения макронапряжений $\langle \sigma \rangle_i = -t_i^* (-k)$. Изменяя вектор \bar{k} в полупространстве макронапряжений, можно установить критерий прочности КМ.

В случае отсутствия корней, что равносильно выполнению условия $(\bar{\sigma}_0 P + \bar{f}, \bar{\sigma}_0) + q > 0$ хотя бы на одном конечном элементе, необходимо осуществить сдвиг напряжений в точку $\langle \bar{\sigma}_c \rangle$, для которой это условие нарушено на всех конечных элементах. Для композитов, относящихся к классам симметрии, в которых коэффициенты C_{ijkl} эффективных тензоров жесткости удовлетворяют соотношению $C_{11ij} = C_{22ij}$ ($i, j=1, 2, 3$), эту точку можно определить через вектор нагружения $\bar{k}^* = (1, 1, 0, k_4)$ заданием значения k_4 так, что корни t_1^* и t_2^* существуют. Тогда $\langle \bar{\sigma}_c \rangle = 0,5(t_1^* + t_2^*) \bar{k}^*$, и закон нагружения принимает вид $\langle \bar{\sigma} \rangle = tk + \langle \bar{\sigma}_c \rangle$.

При численных расчетах для определенности трансверсальная плоскость принималась изотропной, поэтому в качестве области S был выбран ромб с углом в 60 град. Это предположение не ограничивает общности работы, поскольку при других значениях параметров области S методика расчета микронапряжений не изменяется, меняется лишь структура регулярных упаковок: моноклинная, орторомбическая или тетрагональная (квадратная).

Рассматривался композиционный материал Al6061–В при объемной концентрации волокон $c_p=0,3$. Составляющие фазы имели следующие характеристики: $E_m=72$ ГПа, $E_p=422$ ГПа; $\nu_m=0,3$, $\nu_p=0,2$; $s_m=70$ МПа, $s_p=3,5$ ГПа – пределы прочности алюминия и бора соответственно. Температурные коэффициенты линейного расширения (ТКЛР) матрицы и волокна $\alpha_m^0, \alpha_m^1, \alpha_p^0, \alpha_p^1$ при температурах T_0 и T_1 имеют значения:

$$T_0=20^\circ\text{C} - \alpha_m^0 = 23,2 \cdot 10^{-6} \text{C}^{-1}, \quad \alpha_p^0 = 0,414 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1};$$

$T_1=200^\circ\text{C} - \alpha_m^1 = 25 \cdot 10^{-6} \text{C}^{-1}, \quad \alpha_p^1 = 0,538 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$, их зависимость от температуры предполагалась линейной. Из-за отсутствия дополнительных данных в качестве условия прочности для каждой фазы выбиралось условие Мизеса. Область S была разбита на 6504 треугольных элементов и 3313 узлов с помощью алгоритма, разработанного в работе [8]. Результаты дискретизации представлены на рис. 2.

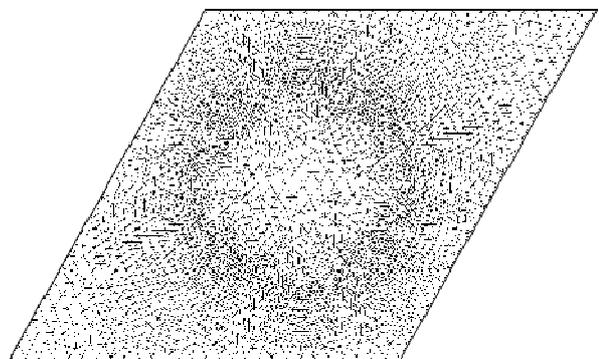


Рис. 2. Результат дискретизации области S

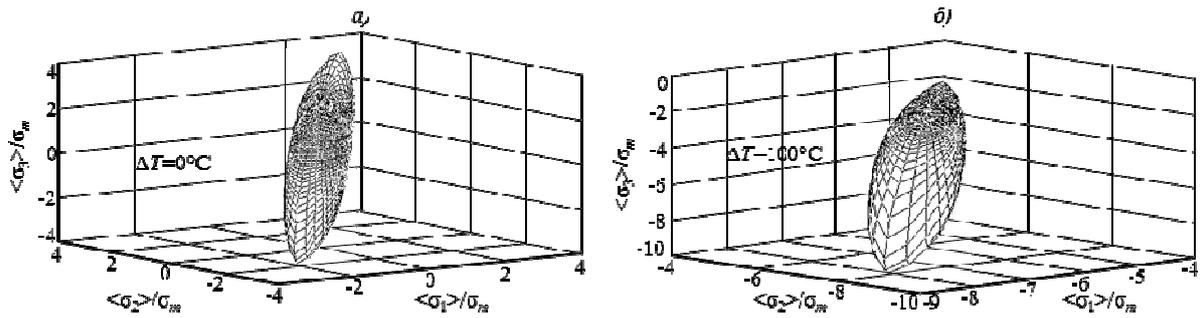


Рис. 3. Поверхности прочности P_0 (а) и P_{100} (б)

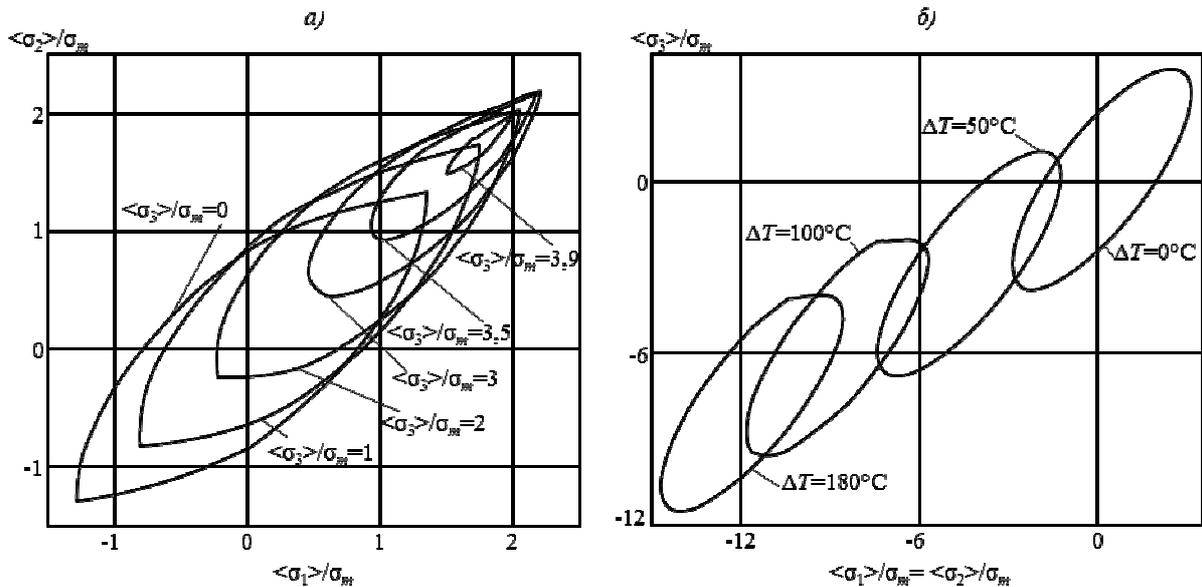


Рис. 4. Сечения поверхности прочности P_0 плоскостями $\langle \sigma_{33} \rangle = \text{const}$ (а) и сечения поверхностей прочности $P_0, P_{50}, P_{100}, P_{180}$ плоскостью $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ (б)

Расчеты при различных значениях температуры $T=T_0+\Delta T$ показали, что поверхности прочности P_{DT} почти не изменяются по форме и близки к эллипсоидам, симметричным относительно плоскости $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$. При изменении ΔT поверхности P_{DT} возникают как результат трансляции вдоль плоскости $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ поверхности P_0 с незначительными деформациями. На рис. 3 приведены поверхности P_0 и P_{100} при $\Delta T=0^\circ\text{C}$ и $\Delta T=100^\circ\text{C}$ соответственно (здесь и далее на рисунках второй индекс у $\langle \sigma_{ii} \rangle$ не приводится).

На рис. 4, а изображены сечения поверхности P_0 плоскостями $\langle \sigma_{33} \rangle / \sigma_m$: 0; 1; 2; 3; 3,5; 3,9, показывающие их близость к эллипсам. Сечения поверхностей $P_0, P_{50}, P_{100}, P_{180}$ плоскостью $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ представлены на рис. 4, б, который наглядно демонстрирует перенос поверхности P_0 .

Начало разрушения (в дальнейшем для краткости – прочность) при указанных значениях ΔT наступало в матрице или волокне в зависимости от направления нагружения \vec{k} . Если координаты этого вектора записать в градусах $\vec{k} = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$, то при $\alpha_i \in [40^\circ, 50^\circ]$, ($i=1, 2$), $\alpha_4 \in [0^\circ, 360^\circ]$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$, $\alpha_4 \in [-95^\circ, -85^\circ] \cup [85^\circ, 95^\circ]$ критические

значения микронапряжений возникали в волокне около границы раздела фаз, а при остальных направлениях нагружения – в матрице также вблизи границы раздела. Этим можно объяснить появление «хребта» у поверхностей, представленных на рис. 3.

Сравнение при $\Delta T=0^\circ\text{C}$ полученных расчетных значений прочности $\sigma_{\text{com}(i)}$ ($i=1, 3$ – нагружение композита осуществляется поперек и вдоль волокон соответственно) с экспериментальными и теоретическими данными при одноосных нагружениях показали их хорошее совпадение. Так, при нагружении вдоль волокон расчетный предел прочности $\sigma_{\text{com}(3)}$ близок к значению, вычисленному по известной формуле [9]:

$$\frac{\sigma_{\text{com}(3)}}{\sigma_m} = 1 - c_p + c_p \frac{E_p}{E_m} \quad (26)$$

В приведенных расчетах $\sigma_{\text{com}(3)} / \sigma_m = 2,41$, по формуле (26) эта величина равна 2,46. При нагружении поперек волокон экспериментальное значение прочности $\sigma_{\text{com}(1)} / \sigma_m \approx 0,85$ [10], расчетное значение $\sigma_{\text{com}(1)} / \sigma_m = 0,813$. Отклонение расчетных данных от экспериментальных в сторону умень-

нения объясняется тем, что построенная модель описывает зарождение разрушения, а экспериментальные данные отражают полное разрушение композитной системы.

Предложенная модель построения критерия прочности основана на структурном подходе, при котором прочность композита определяется через анализ микронапряжений. Такой подход позволяет избежать неоднозначности, присущей феноменологическому подходу, при котором осуществляется аналитическая аппроксимация экспериментальных данных при одноосном растяжении и сдвиге. При структурном подходе такая неоднозначность отсутствует и, кроме того, он позволяет

указать область в КМ, в которой зарождается разрушение, и предоставляет возможность дальнейшего отслеживания процесса разрушения.

Таким образом, приемлемое совпадение расчетных данных с экспериментальными и теоретическими при одноосных нагружениях, использование структурного подхода и выполнение законов осреднения микронапряжений приводят к тому, что данная модель может быть пригодной для дальнейших исследований поведения КМ, в частности, его полного разрушения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №11-01-00053).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир. 1982. 334 с.
2. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука. 1977. 400 с.
3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. К.: Наукова думка. 1985. 304 с.
4. Каблов Е.Н., Щетанов Б.В., Шавнев А.А., Няфкин А.Н. Свойства и применение высоконаполненного металлического композиционного материала Al-SiC //Технология машиностроения. 2011. №3. С. 5–7.
5. Ерасов В.С., Нужный Г.А. Жесткий цикл нагружения при усталостных испытаниях //Авиационные материалы и технологии. 2011. №4. С. 35–41.
6. Немировский Ю.В., Пятаев С.Ф. Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала //Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2009. №4. 470–483.
7. Немировский Ю.В., Пятаев С.Ф. Определение предельного упругого сопротивления композитов при сложном напряженном состоянии /Межвуз. сб.: Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород: Н.-НГУ. 2000. С. 5–18.
8. Немировский Ю.В., Пятаев С.Ф. Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов //Вычислительные технологии. 2000. №2. С. 82–91.
9. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир. 1982. 232 с.
10. Эберт Л.Дж., Райт П.Л. Механические аспекты поверхности раздела /В сб.: Поверхности раздела в металлических композитах. Т. 1. М.: Мир. 1978. С. 42–76.