

УДК 66.017

В.С. Ерасов<sup>1</sup>, Е.И. Орешко<sup>1</sup>, А.Н. Луценко<sup>1</sup>**ПЛОЩАДЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
КАК КРИТЕРИЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ**

DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-2-69-79

*Рассмотрена модель деформирования и разрушения нагружаемых хрупких тел как процессов изменения объема, площади поверхности и линейных размеров тела с учетом энергетического подхода, требующего дополнительной энергии для появления новой поверхности. При этом учитывается, что не вся выделяемая при образовании новой свободной поверхности энергия расходуется на ее образование. Часть энергии рассеивается в виде тепла, звуковых и электромагнитных волн.*

*Показано, что формула Гриффитса является частным случаем представленной модели, так как разрушение рассматривается как развитие длины трещины, а не как образование новой поверхности с учетом диссипативной энергии излучения.*

*Определено влияние площади свободной поверхности на разрушающие напряжения в деформированном хрупком теле.*

*Получена формула для критического радиуса сферической несплошности, при котором происходит разрушение хрупкого тела.*

*Работа выполнена в рамках реализации комплексного научного направления 3.3. «Технология прогнозирования свойств, моделирования и реализации современных процессов конструирования и производства изделий из неметаллических и композиционных материалов с использованием цифровых методов, совместимых с CAD/CAM/CAE и PLM системами» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [1].*

**Ключевые слова:** потенциальная энергия, объем тела, свободная поверхность тела, удельная энергия, разрушение, деформация.

*The model of deformation and fracture of loaded brittle solids as processes of change in volume, surface area and linear sizes of the solid, taking into account the power approach demanding additional energy for emergence of a new surface is considered. It is thus considered, that not all energy released at formation of the new free surface is spent for its formation. The part of the energy is dissipated in the form of heat, sound and electromagnetic waves.*

*It is shown that Griffiths' formula is a special case of the presented model since fracture is considered as crack length propagation but not formation of the new surface taking into account the dissipative radiation energy.*

*The dependence of the rupture stress on the area of the free surface in deformed brittle solid is presented.*

*The formula has been received for critical radius of a spherical discontinuity flaw at which the brittle solid would rupture.*

*Work is executed within implementation of the complex scientific direction 3.3. «Technology of properties forecasting, modeling and implementation of modern processes of designing and production of products from nonmetallic and composite materials with use of the digital methods compatible to CAD/CAM/CAE and PLM by systems» («The strategic directions of development of materials and technologies of their processing for the period till 2030»)[1].*

**Keywords:** potential energy, body volume, free surface of a solid, specific work, fracture, deformation.

<sup>1</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal state unitary enterprise «All-Russian scientific research institute of aviation materials» State research center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

**Введение**

Создание материалов с низким содержанием дефектов структуры является одной из актуальных проблем современного материаловедения [2, 3]. В процессе синтеза новых материалов, как правило, образуются различного рода дефекты, а именно: микротрещины, дефекты упаковки кри-

сталлических решеток и т. п. Наличие подобного рода дефектов не допускается при производстве полупроводниковых и оптоэлектронных приборов. Возникающие в процессе синтеза материалов так называемые «ростовые» дефекты (дефекты роста), а также дефекты, образующиеся в процессе работы приборов, могут приводить к их

деградации и снижению срока службы. Недопустимо образование критической плотности дефектов в оболочках ядерных реакторов, корпусах самолетов, ракет и т. д.

Расчетные методы по определению работоспособности конструкций разрабатываются с учетом результатов испытаний образцов из материалов конструкций, наиболее распространенными из которых являются испытания на статическое растяжение [4–15]. Результат испытания на статическое растяжение – диаграмма деформирования образца дает наглядное представление о поведении материала и его механических свойствах в упругой и пластической областях. В работах [16, 17] рассмотрено взаимодействие основных факторов при испытаниях на растяжение образцов материалов: деформации  $\varepsilon$ , напряжения  $\sigma$  и времени  $t$ . Введение координаты времени дает наглядное представление о том, что ни силовой, ни энергетический, ни деформационный критерии не исключают повреждаемость образца, и со временем образец, накапливая повреждения, может разрушиться.

Исследования в области механики разрушения показали, что дефекты в материалах могут возникать в процессе эксплуатации, а не только на стадии создания материалов [18]. Классические модели механики деформируемого твердого тела не позволяют описать микроскопические явления, вызывающие зарождение микротрещин в материале. Это обстоятельство явилось основным мотивирующим фактором для разработки новых теоретических моделей, способных описать зарождения и рост микродефектов.

Началом изучения процессов разрушения хрупких тел принято считать работу Алана Гриффитса «Явление разрушения и течение твердых тел», опубликованную в 1921 г. В этой работе А. Гриффитс ввел априорное существование в материале микротрещин, объяснив тем самым существенное снижение теоретической прочности материала. Впервые была разработана модель, количественно описывающая процесс разрушения в хрупких телах. На базе этой идеи был разработан новый раздел механики твердого деформируемого тела – механика разрушения. С помощью аппарата теории упругости были получены важнейшие соотношения, которые до сих пор являются актуальными и востребованными для инженерных «макроскопических» задач.

Энергетическую теорию хрупкого разрушения А. Гриффитс открыл при исследовании тонких стекол, в которых основополагающими критериями разрушения являлись длина трещины, поверхностная энергия и разрушающие напряжения. В настоящее время при нагружении объемных тел также исследуют зависимость напряжений от длины трещины. Однако при одинаковой длине трещины разрушающие напряжения могут различаться, так как на их величину оказывает влияние

форма образовавшейся свободной поверхности. В данной работе будет построена модель зависимости разрушающих напряжений от площади образовавшейся свободной поверхности.

В продолжение работы [19] рассмотрим хрупкое разрушение изотропного материала как процесс образования и роста свободной поверхности с учетом энергетического подхода, согласно которому для возникновения трещины совершенно необязательно, чтобы в твердом теле присутствовал зародыш будущей трещины. Из представленной модели выведем формулу для критического радиуса субмикронесплошности сферической формы, при котором начинается и развивается разрушение твердого тела.

### Материалы и методы

Рассмотрим процесс деформирования при растяжении длинного стержня круглого поперечного сечения из изотропного материала.

Пусть  $\varepsilon$  – относительная продольная деформация стержня при приложении к нему растягивающей нагрузки,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. В пределах упругости ( $0 < \mu < 0,5$ ) относительное изменение расстояния между точками на образующей стержня или параллельных ей прямых равно  $\varepsilon$ . Относительное изменение площади боковой поверхности стержня равно  $\varepsilon(1-\mu)$ , а относительное изменение объема:  $\varepsilon(1-2\mu)$ . Данные значения получены при условии, что  $\varepsilon \ll 1$ , которое позволяет пренебречь (за их малостью) дополнительными слагаемыми, представляющими собой величины порядка  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$ . Таким образом, в пределах упругой деформации по отношению к исходным величинам, менее всего меняется объем, за ним идет изменение поверхности и наибольшее относительное изменение претерпевает линейная деформация. Увеличение площади поверхности образца проходит только вследствие упругой деформации. Процессы изменения объема, площади поверхности и линейных размеров являются обратимыми.

В ходе нагружения стержня сила  $P$  совершает работу над образцом, и эта работа преобразуется в потенциальную энергию или энергию деформации, которая накапливается в образце. Если затем силу  $P$  медленно снять, то стержень вернется к своей исходной длине. В течение такого процесса разгрузки энергия деформации, накопленная в стержне, может быть возвращена в виде работы. Таким образом, стержень действует подобно упругой пружине, которая может накапливать и отдавать энергию при приложении или снятии нагрузки.

### Результаты

Пусть в некоторой области твердого тела «1» (рис. 1) накопленная потенциальная энергия деформирования превысит значение  $V_1 k \varepsilon_y^2$  на величину  $A_{\text{доп}}$  ( $k \varepsilon_y^2$  – предельная упругая удельная энергия) [19]. Условие начала процесса разруше-

ния в области «1»:  $A_{доп} > 0$ . Формула (1) представляет равенство энергий в объеме  $V_1$  до начала процесса разрушения и после образования одного очага разрушения со свободной поверхностью площадью  $S$ :

$$V_1 k \epsilon_y^2 + A_{доп} = \gamma S - A_{изл}^{уд} S + V_1 k \epsilon_y^2 - V_2 k \epsilon_y^2, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – работа, затраченная на образование единицы новой поверхности (поверхностная энергия);  $A_{изл}^{уд}$  – диссипативная энергия (константа) тепловых и звуковых волн из зоны разрушения, затраченная на образование единицы новой поверхности;  $V_2$  – объем разгруженной области вокруг образовавшейся свободной поверхности.

Для многоочагового разрушения формула (1) примет вид:

$$V_1 k \epsilon_y^2 + A_{доп} = \gamma \sum_{i=2}^n S_i - A_{изл}^{уд} \sum_{i=2}^n S_i + V_1 k \epsilon_y^2 - k \epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i, \quad (2)$$

где  $n$  – число новых свободных поверхностей;  $V_i$  – объем разгруженной области вокруг образовавшейся свободной поверхности  $S_i$  из области объемом  $V_1$ ;  $S_i$  – площадь одной из  $n$  образовавшихся свободных поверхностей.

Схематично значение  $V_1 k \epsilon_y^2$  представлено как потенциальная энергия деформирования образца до разрушения, а  $V_2 k \epsilon_y^2$  – как область вокруг образовавшейся свободной поверхности, разгрузив-

шей данную зону (рис. 1, а). Для многоочагового дефектообразования значение  $V_1 k \epsilon_y^2$  представлено как потенциальная энергия деформирования образца до разрушения, а  $\sum_{i=2}^n V_i$  – как области

вокруг образовавшихся свободных поверхностей, разгрузивших данную зону (рис. 1, б).

Объем  $V_2$  вокруг образовавшейся свободной поверхности и с учетом сохранения размерности можно представить в виде:

$$V_2 = a S^{3/2}, \quad (3)$$

где  $a$  – безразмерная константа, определяемая ориентацией свободной поверхности в поле энергии упругой деформации.

В результате преобразований уравнения (1) получаем:

$$A_{доп} = \gamma S - A_{изл}^{уд} S - B S^{3/2}, \quad (4)$$

где  $B$  – константа, равная  $a k \epsilon_y^2$ .

Представим формулу (4) графически (рис. 2).

Продифференцируем дополнительную работу по площади образовавшейся поверхности образца  $S$

$$\frac{\partial A_{доп}}{\partial S} = A_1 - B S^{1/2}, \quad (5)$$

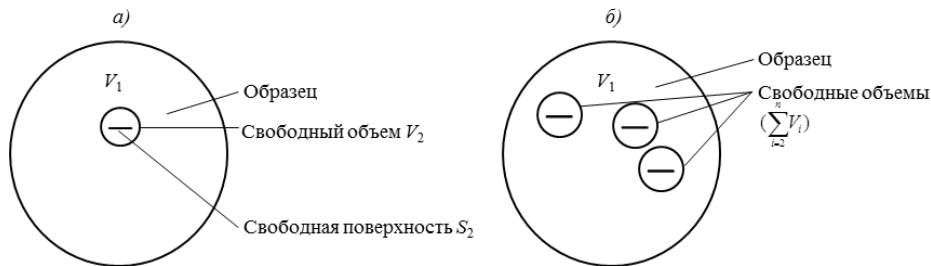


Рис. 1. Потенциальная энергия деформирования образца до разрушения и разгруженная область вокруг образовавшейся свободной поверхности (а) и образовавшихся свободных поверхностей (б)

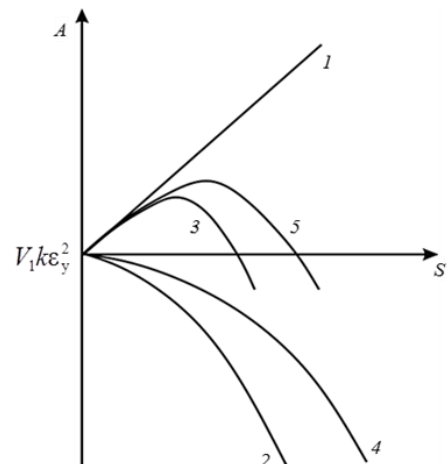


Рис. 2. Изменение потенциальной энергии в объеме  $V_1$ :  
 1 – рост энергии по линейному закону вследствие образования свободной поверхности; 2 – уменьшение энергии за счет разгрузки объема  $V_2$  вокруг свободной поверхности; 3 – изменение потенциальной энергии в зависимости от площади свободной поверхности; 4, 5 – случай многоочагового разрушения

где  $A_1 = \gamma \cdot A_{изл}^{уд}$  – энергия, затраченная на образование единицы новой поверхности;  $B = 3/2ak\epsilon_y^2$  – константа.

Если полученное выражение (производная  $\frac{\partial A_{доп}}{\partial S}$ ):

- $A_1 - BS^{1/2} > 0$ , то энергии недостаточно для развития разрушения образца;
- $A_1 - BS^{1/2} = 0$ , то данный случай является критическим состоянием, при котором любое приращение работы приведет к разрушению;
- $A_1 - BS^{1/2} < 0$ , то происходит разрушение образца.

Запишем полученные условия в другом виде:

- если  $S < \left(\frac{A_1}{C\epsilon_y^2}\right)^2$ , где  $C = 3/2ak$  – константа, то для развития разрушения требуется дополнительная энергия;
- если  $S = \left(\frac{A_1}{C\epsilon_y^2}\right)^2$ , то данный случай является критическим состоянием, при котором любое приращение работы приведет к развитию разрушения;
- если  $S > \left(\frac{A_1}{C\epsilon_y^2}\right)^2$ , то при данном размере свободной поверхности будет происходить развитие разрушения образца.

Поскольку  $BS^{3/2} > B \sum_{i=2}^n (S_i)^{3/2}$ , то можно предположить, что появление одной свободной поверхности  $S$  быстрее приведет к разрушению, чем появление нескольких свободных поверхностей  $\sum_{i=2}^n S_i$ , при  $S = \sum_{i=2}^n S_i$ .

Для многоочагового разрушения формула (4) примет вид:

$$A_{доп} = \gamma \sum_{i=2}^n S_i - A_{изл}^{уд} \sum_{i=2}^n S_i - ak\epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n S_i^{3/2}. \quad (6)$$

Продифференцируем дополнительную работу по площади образовавшейся поверхности образца:

$$\frac{\partial A_{доп.многоочаг}}{\partial S} = A_1 - B \sum_{i=2}^n S_i^{1/2}. \quad (7)$$

Представим графически зависимость полной энергии деформации образца от площади нескольких образовавшихся поверхностей (рис. 3). Процесс образования и развития свободных поверхностей при деформировании образца происходит по стадиям и зависит от величины дополнительной работы  $A_{доп}$ . Так, при  $A_{доп} = A_{доп}^{max}$  произойдет спонтанное распространение дефекта. При  $A_{доп} < A_{доп}^{max}$  развитие дефекта будет происходить в несколько стадий. Рассмотрим для примера кривые зависимости площади образовавшихся поверхностей от величины совершенной работы, обозначенные цифрами 1–10 и  $m-r$  на рис. 3. В

случае кривой 1–10 можно выделить следующие стадии в образовании и развитии разрушения:

– **отрезок 1–2** – в некоторой области образца, обозначенной точкой «1», накопленная потенциальная энергия деформирования превысила значение  $V_1 k\epsilon_y^2$  на величину  $A_1^{доп}$ , что можно выразить суммой  $V_1 k\epsilon_y^2 + A_1^{доп}$ ;

– **отрезок 2–3** – при равенстве энергий в объеме  $V_1$  до начала процесса разрушения и после образования новых очагов разрушения со свободными поверхностями площадью  $\sum_{i=2}^n S_i$  получим

$$\gamma \sum_{i=2}^n S_i - A_{изл}^{уд} \sum_{i=2}^n S_i + V_1 k\epsilon_y^2 - k\epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i, \text{ где } n - \text{число но-}$$

вых свободных поверхностей;  $V_i$  – объем выросших свободных поверхностей из области объемом  $V_1$ ;  $S_i$  – площадь выросших свободных поверхностей из области площадью  $S_1$ ;

– **отрезок 3–4** – накопленная потенциальная энергия деформирования превысила значение  $k\epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i$  на

величину  $A_2^{доп}$ , что можно выразить суммой

$$k\epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i + A_2^{доп},$$

– **отрезок 4–5** – при равенстве энергий в объемах  $\sum_{i=2}^n V_i$  до начала процесса разрушения и после

образования новых очагов разрушения со свободными поверхностями площадью  $\sum_{a=n+2}^m S_a$  получим

$$\gamma \sum_{a=n+2}^m S_a - A_{изл}^{уд} \sum_{a=n+2}^m S_a + k\epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i - k\epsilon_y^2 \sum_{a=n+2}^m V_a, \text{ где } m - \text{число}$$

новых свободных поверхностей;  $V_a$  – объем выросших свободных поверхностей из областей объемом  $V_i$ ;  $S_a$  – площадь выросших свободных поверхностей из областей площадью  $S_i$ ;

– **отрезок 5–6** – накопленная потенциальная энергия деформирования превысила значение

$$k\epsilon_y^2 \sum_{a=n+2}^m V_a \text{ на величину } A_3^{доп}, \text{ что можно выразить}$$

$$\text{суммой } k\epsilon_y^2 \sum_{a=n+2}^m V_a + A_3^{доп},$$

– **отрезок 6–7** – при равенстве энергий в объемах

$k\epsilon_y^2 \sum_{a=n+1}^m V_a$  до начала процесса разрушения и после

образования новых очагов разрушения со свободными поверхностями площадью  $\sum_b S_b$  получим

$$\gamma \sum_{b=n+m+2}^c S_b - A_{изл}^{уд} \sum_{b=n+m+2}^c S_b + k\epsilon_y^2 \sum_{a=n+2}^m V_a - k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b, \text{ где } c - \text{число}$$

новых свободных поверхностей;  $V_b$  – объем выросших свободных поверхностей из областей объемом  $V_a$ ;  $S_b$  – площадь выросших свободных поверхностей из областей площадью  $S_a$ ;

– **отрезок 7–8** – накопленная потенциальная энергия деформирования превысила значение

$k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b$  на величину  $A_4^{\text{доп}}$ , что можно выразить суммой  $k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b + A_4^{\text{доп}}$ ;

– **отрезок 8–9** – при равенстве энергий в объемах

$k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b$  до начала процесса разрушения и

после образования новых очагов разрушения со сво-

бодными поверхностями площадью  $\sum_{d=n+m+c+2}^l S_d$  получим

$$\gamma \sum_{d=n+m+c+2}^l S_d - A_{\text{изл}}^{\text{уд}} \sum_{d=n+m+c+2}^l S_d + k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b - k\epsilon_y^2 \sum_{d=n+m+c+2}^l V_d,$$

где  $l$  – число новых свободных поверхностей;  $V_d$  – объем выросших свободных поверхностей из областей объемом  $V_b$ ;  $S_d$  – площадь выросших свободных поверхностей из областей площадью  $S_b$ .

При слиянии микротрещин в магистральную трещину получим

$$\gamma \sum_{d=n+m+c+2}^l S_d - A_{\text{изл}}^{\text{уд}} \sum_{d=n+m+c+2}^l S_d +$$

$$+ \gamma \sum_{r=n+m+c+d+2}^f S_r + A_{\text{изл}}^{\text{уд}} \sum_{r=n+m+c+d+2}^f S_r +$$

$$+ k\epsilon_y^2 \sum_{b=n+m+2}^c V_b - k\epsilon_y^2 \sum_{d=n+m+c+2}^l V_d - k\epsilon_y^2 \sum_{r=n+m+c+d+2}^f V_r,$$

где  $f$  – число слившихся в магистральную трещину свободных поверхностей;  $V_r$  – объем магистральной трещины;  $S_r$  – площадь магистральной трещины.

– **отрезок 9–10** – данный участок

$$k\epsilon_y^2 \sum_{d=n+m+c+2}^l V_d - k\epsilon_y^2 \sum_{r=n+m+c+d+2}^f V_r + A_5^{\text{доп}}$$

предшествует образованию свободной поверхности магистральной трещины площадью  $S_{\text{кр}}$ , при которой будет происходить моментальное разрушение образца.

При приложении к накопленной потенциаль-

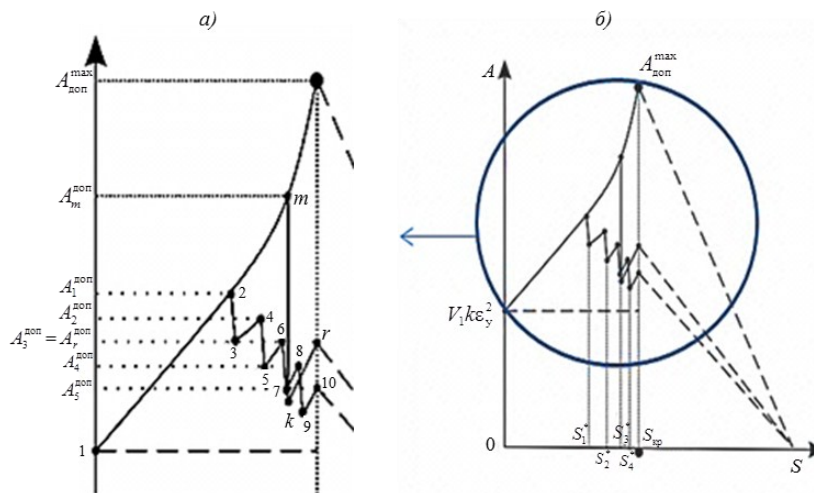


Рис. 3. Зависимость полной работы деформации образца от площади образовавшихся свободных поверхностей, где

$$S_1^* = \sum_{i=2}^n S_i, S_2^* = \sum_{a=n+2}^m S_a, S_3^* = \sum_{b=n+m+2}^c S_b, S_4^* = \sum_{d=n+m+c+2}^l S_d$$

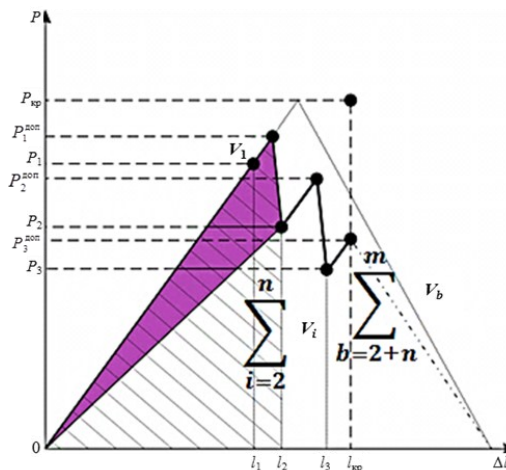


Рис. 4. Зависимость нагрузки от длины свободной поверхности при хрупком разрушении твердого тела

ной энергии деформирования значения, значительно большего  $V_1 k \epsilon_y^2$  на величину  $A_n^{доп}$ , будет наблюдаться всего три стадии в образовании и развитии свободной поверхности:

– **отрезок 1–m** – при котором приращение энергии составит  $V_1 k \epsilon_y^2 + A_m^{доп}$ ;

– **отрезок m–k** – при равенстве энергий в объеме  $V_1$  до начала процесса разрушения и после образования новых очагов разрушения со свободными поверхностями площадью  $S_3$  получим

$$\gamma \sum_{i=2}^n S_i - A_{изл}^{уд} \sum_{i=2}^n S_i + V_1 k \epsilon_y^2 - k \epsilon_y^2 \sum_{m=2}^n V_m;$$

– **отрезок k–r** – накопленная потенциальная энергия деформирования превысила значение  $k \epsilon_y^2 \sum_{m=2}^n V_m$  на

величину  $A_r^{доп}$ , что можно выразить суммой

$$k \epsilon_y^2 \sum_{m=2}^n V_m + A_r^{доп},$$

при этом площадь образовавшихся поверхностей будет равняться  $S_{кр}$ , при которой будет происходить мгновенное разрушение твердого тела.

Описанный многостадийный процесс разрушения твердого тела можно представить в координатах «нагрузка–длина свободной поверхности» для случая образования нескольких свободных поверхностей (рис. 4).

В данном случае полная работа, затраченная на деформирование образца до образования новых очагов разрушения объемом  $k \epsilon_y^2 \sum_{i=2}^n V_i$ , будет

являться площадью заштрихованного треугольника, а диссипативная работа, рассеянная в виде тепла и других эффектов, – площадью треугольника, выделенного цветом.

Графическая зависимость, показанная на рис. 4, наблюдается на диаграмме «нагрузка–раскрытие трещины» при определении межслоевой вязкости разрушения однонаправленно-армированных композитов (стандарт ASTM D5528–13 «Метод определения межслоевой вязкости разрушения однонаправленно-армированных композитов»). Данный метод предпола-

ет вычисление критической работы расслоения (вязкость межслоевого разрушения –  $G_{Ic}$  [Дж/м<sup>2</sup>]), которая определяется как отношение изменения упругой энергии, накопленной в образце (двухконсольная балка) при его нагружении, к бесконечно малому приращению площади межслоевой трещины:

$$G_I = -\frac{1}{b} \frac{dU}{da}, \tag{8}$$

где  $U$  – энергия в вершине трещины, Дж;  $b$  – ширина образца, мм;  $a$  – длина трещины расслоения, мм.

Для иллюстрации расслоения образца в условиях нагружения отрывом на рис. 5 представлены результаты таких расчетов в программе ANSYS, которая позволяет определить критические скорости высвобождения энергии  $G_I, G_{II}, G_{III}$ .

В условиях модели, представленной в данной статье, трещиноподвижная сила определяется как

$$G(S) = \frac{dA_{осв}}{dS} = A_{изл}^{уд} + \frac{3}{2} B S^{1/2}, \tag{9}$$

где  $A_{осв}$  – энергия, освобождающаяся при росте трещины;  $S$  – площадь свободной поверхности.

В модели хрупкого разрушения важно учитывать форму свободной поверхности, так как ее площадь будет влиять на напряжения разрушения.

Выразим критическую площадь  $S_{кр}$  образовавшихся свободных поверхностей, при превышении которой произойдет мгновенное разрушение образца, уравнением:

$$S_{кр} = \left( \frac{2\gamma - 2A_{изл}^{уд}}{3ak\epsilon_y^2} \right)^2. \tag{10}$$

Тогда критическое напряжение, с учетом площади образовавшихся свободных поверхностей при одном очаге разрушения, выражается формулой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4E(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\sqrt{S_{кр}} \cdot 3a}}. \tag{11}$$

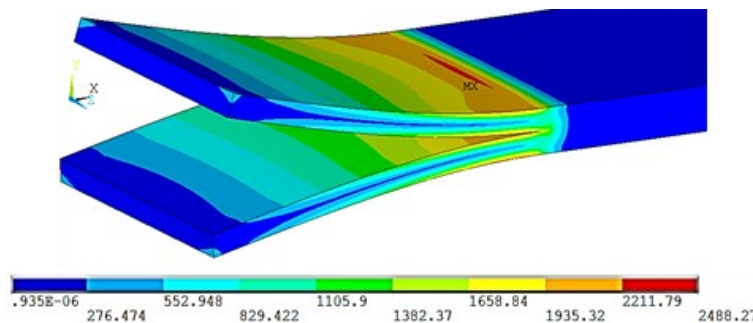


Рис. 5. Разрушение однонаправленно-армированных композитов при определении межслоевой вязкости

Рассмотрим несколько вариантов формы свободной поверхности и влияние ее геометрических параметров на напряжения разрушения. Для иллюстрации площадь поверхности представим в виде квадрата со сторонами, равными длине трещины  $2l$  и толщине образца  $t$ , и несколько вариантов площади свободной поверхности в виде треугольников белого цвета (рис. 6).

Опишем площадь свободной поверхности ( $S$ ) и напряжения разрушения ( $\sigma$ ) при различных геометрических параметрах поверхности разрушения:

$a$  – квадрат со сторонами  $2l$  и  $t$ ;

$$S=2 \cdot 2lt=4lt; \sigma = \sqrt{\frac{4E(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\sqrt{4lt} \cdot 3a}};$$

$b$  – треугольник с основанием  $2l$  и высотой  $t$ ;

$$S=2 \cdot 2lt/2=2lt; \sigma = \sqrt{\frac{4E(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\sqrt{2lt} \cdot 3a}};$$

$в$  – прямоугольный треугольник с катетами  $l$  и  $t$ ;

$$S=2 \cdot lt/2=lt; \sigma = \sqrt{\frac{4E(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\sqrt{lt} \cdot 3a}};$$

$г$  – прямоугольный треугольник с катетами  $l$  и  $t/2$ ;

$$S=2 \cdot lt/4=lt/2; \sigma = \sqrt{\frac{4E(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\sqrt{\frac{lt}{2}} \cdot 3a}}.$$

Таким образом, в зависимости от площади образовавшейся свободной поверхности при одинаковой длине трещины напряжения разрушения могут различаться в 1,4 раза. Поэтому модель Гриффитса может давать заниженные значения разруша-

ющих напряжений, и целесообразно при их расчете учитывать площадь свободной поверхности.

После образования свободных поверхностей энергия в объеме снижается, потому что ее часть превращается в поверхностную энергию и энергию диссипации. Из-за появления концентраторов напряжений следующее нагружение вызовет развитие появившихся свободных поверхностей и их дальнейшее слияние в магистральную трещину с последующим мгновенным разрушением.

Выведем из полученной модели (6) формулу образования трещины Гриффитса.

В 1920 г. Гриффитсом было принято допущение, что тело обладает несплошностью в виде трещины и наделено поверхностной энергией. Макроскопическое разрушение тела происходит при изготовлении или деформации во время нагружения. С учетом наличия трещин можно установить количественную связь между действующим на тело напряжением, формой и размерами трещин и сопротивлением материала докритическому (стабильному) и закритическому (нестабильному) развитию этих трещин [20].

Гриффитс исходил из того, что в материале всегда имеются уже готовые трещины, и проанализировал условия, при которых эти трещины будут развиваться как хрупкие, т. е. нестабильно, с большой скоростью. В теории Гриффитса и в механике разрушения обычно рассматривается растягиваемая изотропная бесконечная пластина конечной толщины, в которой имеется трещина (рис. 7). Длина трещины  $2l$  значительно меньше ширины пластины  $b$  (теоретически эта величина бесконечна).

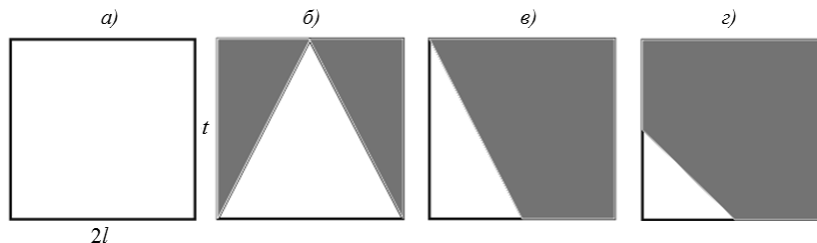


Рис. 6. Геометрические формы свободной поверхности

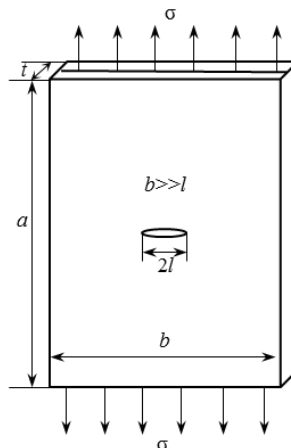


Рис. 7. Пластина со сквозной трещиной



Представим преобразование упругой энергии тела в поверхностную в бесконечной пластине с трещиной длиной  $2l$ , нагруженной напряжениями  $\sigma$ , следующим уравнением:

$$U=U_0+U_1+U_2, \tag{12}$$

где  $U_0$  – энергия тела без трещины;  $U_1$  – изменение упругой энергии при наличии трещины;  $U_2$  – энергия поверхностей трещины.

Поскольку появление сквозной эллипсообразной трещины длиной  $2l$  в пластине приводит к разгрузке и освобождению упругой энергии, то если  $2\pi tl^2$  – объем разгружаемой области;  $\sigma^2/2E=k\varepsilon_y^2$  – удельная энергия деформации, тогда

$$U_1=-\frac{\pi\sigma^2 t}{E}l^2, \tag{13}$$

где  $t$  – толщина пластин.

Если тело имеет удельную поверхностную энергию  $\gamma$ , то затраты энергии на образование трещины с величиной поверхности  $S=4lt$  составят

$$U_2=4\gamma tl. \tag{14}$$

Графическое представление энергии  $U$  от длины трещины  $l$  показано на рис. 8 и имеет вид кривой с максимумом, а длина трещины  $l_c$ , соответствующая этому максимуму, может интерпретироваться как критическая.

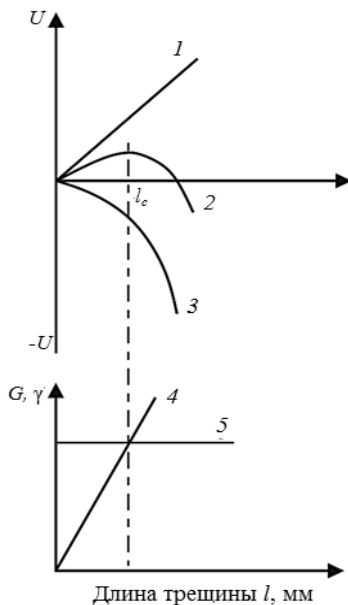


Рис. 8. Зависимость энергии пластины от длины трещины Гриффитса [20]:

1 – поверхностная энергия  $U_0+U_2=2\gamma l$ ; 2 – общая энергия  $U$ ; 3 – потенциальная энергия  $U_0+U_1=-(\sigma\pi l^2)/2E$ ; 4 – величина высвобождения потенциальной энергии  $G=\partial U/\partial l$ ; 5 – поверхностная энергия на единицу длины трещины  $2\gamma$

Поэтому, если производная  $\partial U/\partial l=0$ , то

$$l_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}. \tag{15}$$

Из уравнения (16) можно выразить напряжение разрушения Гриффитса

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \tag{16}$$

Подставив в формулу (4) следующие параметры :

$2l$  – длина трещины;

$t$  – толщина пластины, имеющей габаритные размеры гораздо больше чем  $2l$ ;

$S=2lt$  – площадь поверхности трещины;

$V_1(S)=2\pi l^2 t$  – объем разгружаемой области вокруг трещины;

$\sigma$  – напряжение растяжения, действующее на торцах пластины,

получим уравнение

$$A_{\text{доп}} = (\gamma + A_{\text{изл}}^{\text{уд}})2lt - \pi l^2 t \frac{\sigma^2}{E}. \tag{17}$$

При  $A_{\text{доп}} > 0$  начнет развиваться разрушение. В связи с этим из формулы (17) можно найти напряжение, при котором начнется разрушение образца:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\gamma + A_{\text{изл}}^{\text{уд}})2E}{\pi l}}. \tag{18}$$

Таким образом, если не учитывать диссипативную энергию разрушения, то из полученной формулы можно получить напряжение разрушения Гриффитса. Но из теории Гриффитса невозможно прийти к данной модели, так как она рассматривает разрушение как трещину, а не как образование новой поверхности.

При деформации материала в микрообъемах, развивается деформационная пористость. Классификацию деформационных микронесплошностей проводят по их форме, размеру, месту локализации и ряду других отличий [21].

При нагружении может происходить зарождение, развитие и слияние пор с образованием магистральной трещины (рис. 9). На рис. 10 показана микроструктура алюминиевого сплава и схема его разрушения путем роста и слияния пор.

Рассмотрим субмикронесплошность сферической формы и определим ее критический радиус, при котором начинается и развивается разрушение твердого тела.

При образовании поры в виде сферы радиусом  $R$  ее площадь определяется по формуле:

$$S=4\pi R^2, \tag{19}$$

а объем сферической поры равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{20}$$



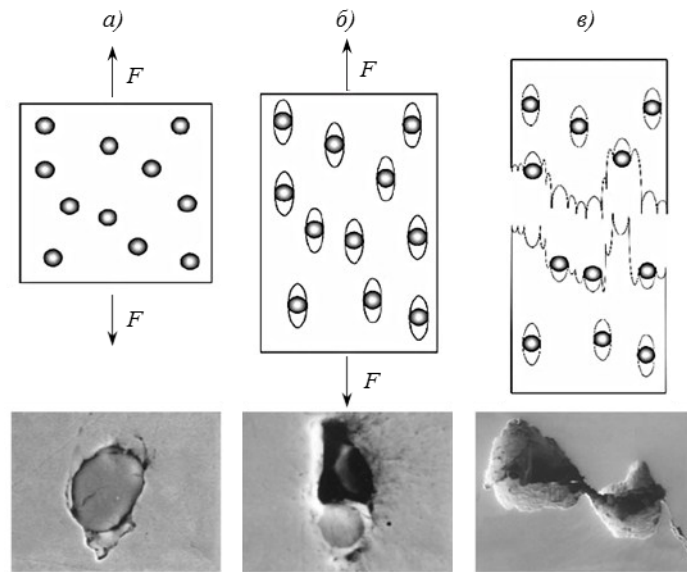


Рис. 9. Схематическое представление разрушения путем зарождения (а), роста (б) и слияния пор (в)

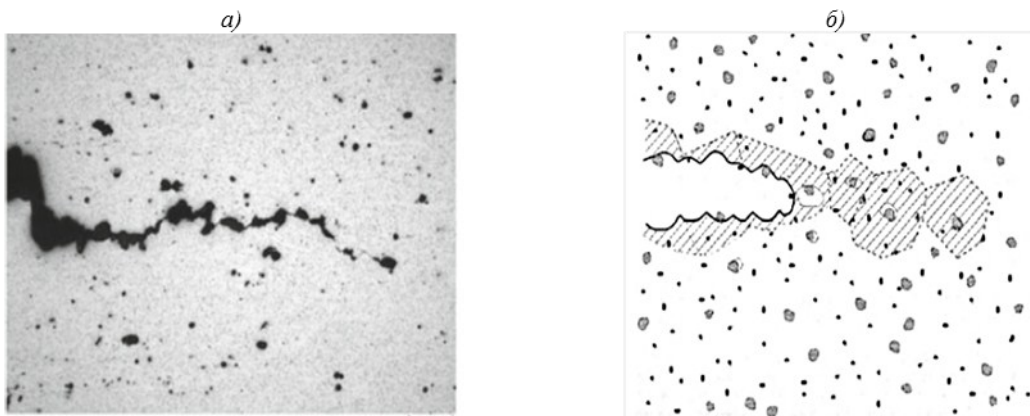


Рис. 10. Микроструктура алюминиевого сплава (а) и схема его разрушения путем роста и слияния пор (б)

Подставив выражения (19) и (20) в уравнение (3), получаем следующее выражение

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = a(4\pi R^2)^{3/2} = a8\pi^{3/2}R^3, \quad (21)$$

отсюда

$$a = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 8\pi^{3/2}R^3} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

Если  $A_1 - B_1 S^{1/2} < 0$ , то происходит разрушение образца.

Условие, при котором не происходит разрушения материала при наличии в нем дефекта:

$$S^{1/2} > \frac{2A_1}{3B}. \quad (23)$$

Данное неравенство можно представить как

$$2R\sqrt{n} > \frac{2(\gamma - A_{изл}^{уд})6\sqrt{n}}{3u}, \quad (24)$$

$$R > \frac{2(\gamma - A_{изл}^{уд})}{u}, \quad (25)$$

где  $u$  – удельная энергия деформации, т. е. затраты энергии на образование трещины с величиной поверхности  $S$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon\sigma = \frac{\sigma}{2E}\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (26)$$

Из полученного неравенства можно представить формулу радиуса поры, при котором происходит развитие разрушения:

$$R \approx \frac{2(\gamma - A_{изл}^{уд})}{u} \quad \text{или} \quad R \approx \frac{4(\gamma - A_{изл}^{уд})}{\epsilon\sigma}. \quad (27)$$

Если пренебречь диссипативной энергией, затраченной на образование единицы новой поверхности, то в полученном выражении критический радиус поры отличается на коэффициент  $2/\epsilon$ , в отличие от известной формулы

критического радиуса пустой сферической поры [21]:

$$R \approx \frac{2\gamma \cdot 2}{\sigma \cdot \varepsilon} \quad (28)$$

Таким образом, из представленной модели (1) выведена формула (28) для критического радиуса субмикронесплошности сферической формы, при котором происходит разрушение хрупкого тела.

#### Обсуждение и заключения

Рассмотрена модель упругого деформирования и разрушения твердого деформируемого тела как процессов изменения объема, площади поверхности и линейных размеров в нагружаемом образце. При этом учитывается, что не вся выделяемая при

образовании новой свободной поверхности энергия расходуется на образование свободных поверхностей. Часть энергии рассеивается в виде тепла, звуковых и электромагнитных волн.

Проведено сравнение полученной модели с критерием Гриффитса, который является ее частным случаем, так как рассматривает разрушение как развитие трещины, а не как образование новой поверхности с учетом диссипативной энергии теплового излучения.

Определено влияние площади свободной поверхности на разрушающие напряжения в деформированном хрупком теле.

Получена формула для критического радиуса субмикронесплошности сферической формы, при котором происходит разрушение хрупкого тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
2. Каблов Е.Н., Гращенков Д.В., Ерасов В.С. и др. Стенд для испытания на климатической станции ГЦКИ крупногабаритных конструкций из ПКМ // Сб. докл. IX Международ. науч. конф. по гидроавиации «Гидроавиасалон–2012». 2012. С. 122–123.
3. Каблов Е.Н., Гриневич А.В., Ерасов В.С. Характеристики прочности металлических авиационных материалов и их расчетные значения // 75 лет. Авиационные материалы. Избранные труды «ВИАМ» 1932–2007: юбилейный науч.-технич. сб. М.: ВИАМ, 2007. С. 370–379.
4. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Выбор схемы расположения высокомодульных слоев в многослойной гибридной пластине для ее наибольшего сопротивления потере устойчивости // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №4. С. 109–117. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-4-109-117.
5. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Математическое моделирование деформирования конструкционного углепластика при изгибе // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №2 (41). С. 50–59. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-2-50-59.
6. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю., Луценко А.Н. Расчет на прочность гибридной панели крыла на базе листов и профилей из высокопрочного алюминий-литиевого сплава и слоистого алюмокомпозитного пластика // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №1 (40). С. 53–61. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-1-53-61.
7. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа // *Математическое моделирование и численные методы*. 2015. №2. С. 3–22.
8. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №3 (42). С. 33–48. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-3-33-48.
9. Коллеров М.Ю., Усиков В.Д., Куфтов В.С., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Медико-техническое обоснование использования титановых сплавов в имплантируемых конструкциях для стабилизации позвоночника // *Титан*. 2013. №1 (40). С. 39–45.
10. Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Экспериментально-теоретическое обоснование выбора метода и имплантатов для устранения воронкообразной деформации грудной клетки // *Научные труды (Вестник МАТИ)*. 2012. №19 (91). С. 331–336.
11. Гусев Д.Е., Коллеров М.Ю., Рудаков С.С., Королев П.А., Орешко Е.И. Оценка биомеханической совместимости имплантируемых опорных пластин из сплавов на основе титана и никелида титана методом компьютерного моделирования // *Титан*. 2011. №3 (33). С. 39–44.
12. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №4. С. 74–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79.
13. Антипов В.В., Орешко Е.И., Ерасов В.С., Серебряникова Н.Ю. Гибридные слоистые материалы для применения в условиях Севера // *Механика композитных материалов*. 2016. Т. 52. №5. С. 973–990.
14. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Туренко Е.Ю. Интегрированная информационная система для хранения данных по свойствам жаропрочных никелевых сплавов и расчета их механических характеристик // *Авиационные материалы и технологии*. 2017 (в печати).

15. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Критические напряжения потери устойчивости в гибридных слоистых пластинах // *Материаловедение*. 2017 (в печати).
16. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Повреждаемость материалов при статическом растяжении // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №4 (37). С. 91–94. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-04-91-94.
17. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н., Терентьев В.Ф., Слизов А.К. Построение диаграмм деформирования в трехмерном пространстве  $\sigma$ - $\epsilon$ - $t$  // *Авиационные материалы и технологии*. 2017 (в печати).
18. Кузмичев С.В. Зарождение дефектов структуры в твердых хрупких телах под воздействием внешней механической нагрузки: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб.: Ин-т проблем машиноведения РАН, 2011. 16 с.
19. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Деформация и разрушение как процессы изменения объема, площади поверхности и линейных размеров в нагружаемых телах // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн.* 2016. №8 (44). Ст. 11. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 29.11.2016). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-08-11-11.
20. Нотт Дж.Ф. Основы механики разрушения. Пер. с англ. М.: Металлургия, 1978. С. 97–98.
21. Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И. Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990. С. 156–158.